

2. CONDUCTION THERMIQUE

La conduction est une transmission de la chaleur dans la matière par vibration moléculaire. Les vibrations thermiques des cristaux sont des phonons excités.

Considérons donc un solide homogène à l'intérieur duquel la température varie d'un point à un autre, tout en restant constante en chaque point (régime stationnaire). Chaque point A du solide est repéré par ses trois coordonnées x, y, z , et en ce point existe une température T . Puisque pour chaque point A il existe une température $T = f(x, y, z)$, on admettra que cette fonction des trois variables est continue dans tout le solide jusque sur sa surface. Ceci veut dire qu'il existe au voisinage de A d'autres points ayant la même température T . On peut tracer à l'intérieur du solide une surface S où tous les points sont à la même température T : une surface isotherme où "l'isotherme T " et la température T sont représentés par un champ scalaire. Les changements de T sont décrits par un vecteur:

$$\vec{\nabla}T \equiv \overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \quad (2.1)$$

En appelant $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unitaires des trois axes, le vecteur **grad T**, défini en tout point M, est perpendiculaire à la surface isotherme et dirigé vers une surface isotherme à température supérieure. (déf. du gradient)

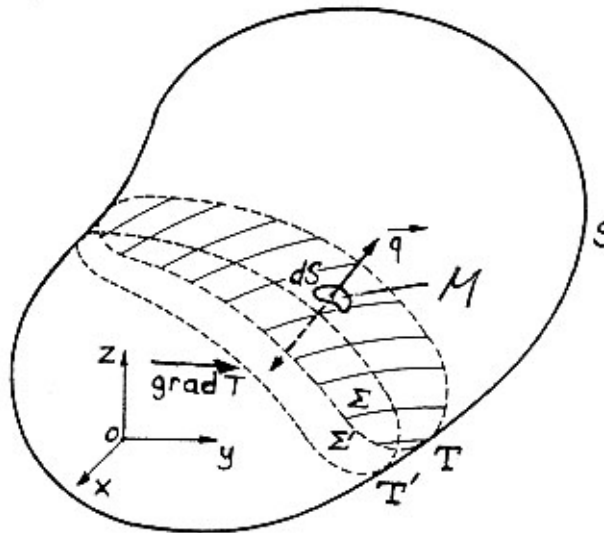


Figure 2.1:

Considérons une surface isotherme S à température T à l'instant t (au point M). A travers un élément de surface élémentaire dS entourant M de la chaleur s'écoule perpendiculairement à S . Soit δP la puissance thermique instantanée traversant dS .

On appelle \mathbf{q} la densité de flux de chaleur:

$$\vec{q} = \frac{dP}{dS} \quad [\text{W/m}^2] \quad (2.2)$$

On représente la densité de courant par un vecteur densité de flux de chaleur (\vec{q}) qui a pour direction et sens la direction et le sens de l'écoulement de la chaleur. \vec{q} est parallèle et de sens contraire à $\text{grad } T$.

La loi de la conduction de la chaleur (loi de Fourier) s'exprime par la relation suivante:

$$\boxed{\vec{q} = -k \text{ grad } T} \quad (2.3)$$

où k (le coefficient de conduction thermique) est une propriété physique du matériau au point M (par exemple le matériau, la température, la direction ...).

Si le flux de chaleur passe à travers une surface du corps, mais que la surface isotherme n'est pas parallèle à la surface du corps, le flux de chaleur sera:

$$\delta P = \vec{n} \cdot \vec{q} \cdot dS \quad (2.4)$$

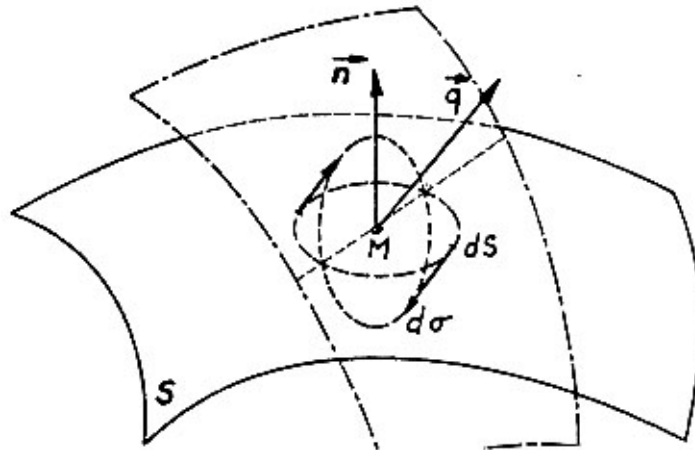


Figure 2.2 :

2.1 Equation de la chaleur dans le cas de régime instationnaire (Equation de Fourier)

Le flux de chaleur δP est lui-même fonction du temps et varie en général au fur et à mesure de l'évolution du phénomène qui provoque ce transfert. Le flux de chaleur à travers une surface peut aisément être déterminé si l'on connaît la densité de flux de chaleur en chaque point de la surface. Cette densité peut se calculer si l'on connaît la loi de répartition des températures dans le milieu. Pour établir cette équation, considérons un point P du milieu. Soit x, y, z les coordonnées de P , soit T la température en ce point à l'instant t , k la conductivité du matériau qui l'entoure, \vec{q} le vecteur densité de flux de

chaleur en P, \vec{v} le vecteur de vitesse du milieu en ce point (voir Fig 2.3). Considérons un parallélépipède rectangle infinitésimal ABCDA'B'C'D' (Fig 2.3).

On a, d'après le premier principe de la Thermodynamique en régime variable :

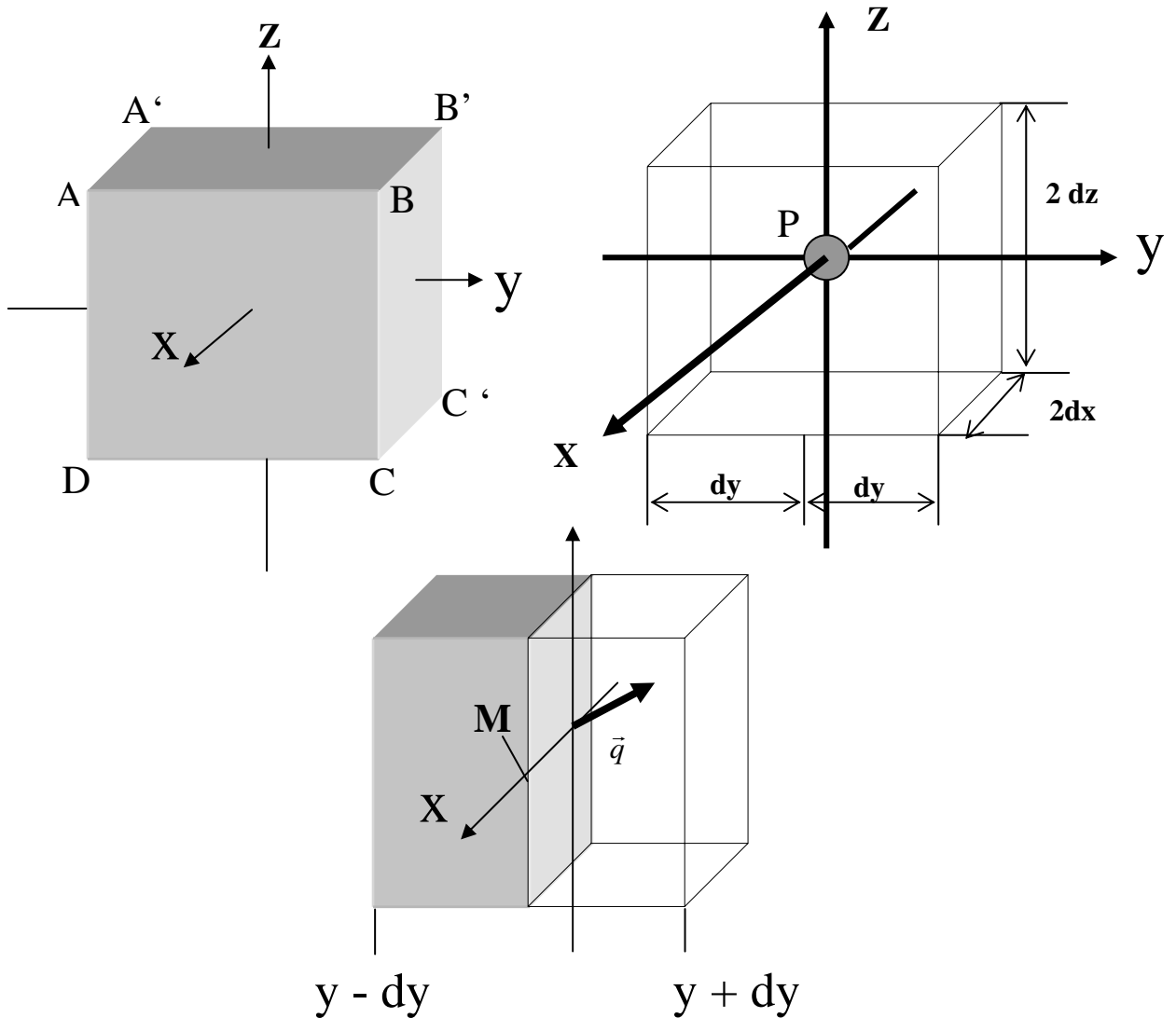


Fig 2.3 Transfert de chaleur dans un petit élément de volume

$$\dot{W} + \dot{Q} + \sum_i \dot{m}_i \left(H_i + \frac{1}{2} v_i^2 + g z_i \right) = \frac{d}{dt} \left[m \left(H + \frac{v^2}{2} + g z \right) \right] \quad (2.5)$$

avec

\dot{W} = puissance mécanique communiquée à l'élément

\dot{Q} = la puissance calorifique que l'élément reçoit

\dot{m}_i = débit de matière entrant ($m > 0$) ou sortant ($m < 0$) à travers la face élémentaire i

H_i = l'enthalpie massique de cette matière [J/Kg]

v_i = la vitesse de cette matière

z_i = altitude de cette matière

m est la masse de matière à l'intérieur de l'élément ayant une vitesse v , altitude z et une enthalpie h .

Dans le domaine des transferts de chaleur, normalement aucune énergie mécanique n'est échangée avec l'extérieur, donc $\dot{W} = 0$.

Parce que l'élément est de dimension infinitésimale, on peut admettre que $z_i = z$ d'où

$$\sum_i m_i g z_i = g z \sum_i \dot{m}_i$$

et avec la règle de la conservation de la masse:

$$\sum_i \dot{m}_i = \frac{dm}{dt} \quad (2.6)$$

$$\sum_i \dot{m}_i g z_i = \frac{d}{dt} (m g z)$$

Utilisons ce résultat dans l'équation (2.5), on trouve :

$$\dot{Q} + \sum_i \dot{m}_i \left(H_i + \frac{1}{2} v_i^2 \right) = \frac{d}{dt} \left[m H + m \frac{v^2}{2} \right] \quad (2.7)$$

Pour le cas où aucun échange de matière ne se produit :

$$\dot{m}_i = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{dm}{dt} = 0$$

et la masse du système reste constante, donc (2.8)

$$\dot{Q} = m \frac{d}{dt} \left(H + \frac{v^2}{2} \right)$$

Comme déjà mentionné, le système n'est pas soumis à des efforts mécaniques, son énergie cinétique reste donc constante, l'équation (2.8) s'écrit :

$$\dot{Q} = m \frac{dH}{dt} \quad (2.9)$$

Equation (2.9) décrit le cas de conduction thermique pur. Le second membre de l'équation (2.9) devient avec équation 1.2 et 1.3

$$m \frac{dH}{dt} = m C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (2.10)$$

dV = volume de l'élément, ρ = la masse volumique et C_p chaleur massique.

\dot{Q} est égal à la somme des flux de chaleur traversant la surface de l'élément, $\sum_i \delta P_i$, et de la puissance engendrée \dot{Q}_p (chaleur latente de transformation de phase, réaction chimique, effet Joule). Finalement, l'équation (2.5) peut s'écrire (estimations : aucune transfert de masse, puissance mécanique nulle, différence d'énergie potentielle négligeable) :

$$\sum_i \delta P_i + \dot{Q}_p = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (2.11)$$

Equation (2.11) est utile, si on peut trouver une expression pour le terme $\sum_i \delta P_i$. Soit ABCD la face située dans le plan $x+dx$ (voir fig 2.3) et M le milieu du rectangle ABCD. La température en M peut être estimée comme

$$T_M = T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \quad (2.12)$$

et de même la densité de flux de chaleur en M :

$$\vec{q}_M = \vec{q} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} dx \quad (2.13)$$

Le flux de chaleur qui traverse la surface ABCD (aire de cette surface = $4dydz$) dans le sens de x croissant (sortant du système) est donc :

$$\delta P_{x+dx} = -4 \left(\vec{q} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} dx \right) \vec{i} \cdot dydz \quad (2.14)$$

Pour la surface A'B'C'D', dans le plan $x-dx$, le flux qui pénètre dans le volume par cette surface est

$$\delta P_{x-dx} = +4 \left(\vec{q} - \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} dx \right) \vec{i} \cdot dydz \quad (2.15)$$

D'une manière strictement analogue on aura

$$\begin{aligned} \delta P_{y+dy} &= -4 \left(\vec{q} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} dy \right) \vec{j} \cdot dx dz \\ \delta P_{y-dy} &= +4 \left(\vec{q} - \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} dy \right) \vec{j} \cdot dx dz \\ \delta P_{z+dz} &= -4 \left(\vec{q} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial z} dz \right) \vec{k} \cdot dx dy \\ \delta P_{z-dz} &= +4 \left(\vec{q} - \frac{\partial \vec{q}}{\partial z} dz \right) \vec{k} \cdot dx dy \end{aligned} \quad (2.16)$$

Le flux total pénétrant dans le solide est la somme de six flux ((2.14)(2.15)(2.16)) :

$$\begin{aligned}\sum_i \delta P_i &= -8dx \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} \vec{i} dydz - 8dy \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} \vec{j} dx dz - 8dz \frac{\partial \vec{q}}{\partial z} \vec{k} dx dy \\ \sum_i \delta P_i &= -8dxdydz \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial z} \vec{k} \right)\end{aligned}\quad (2.17)$$

Avec $8 \, dxdydz = dV$ et équation (2.17) l'équation (2.11) vient

$$-dV \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial z} \vec{k} \right) + \dot{Q}_p = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (2.18)$$

On peut modifier le premier terme de équation (2.18) utilisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{q}}{\partial x} \vec{i} &= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{q} \cdot \vec{i}) \\ \vec{q} \cdot \vec{i} &= q_x\end{aligned}\quad (2.19)$$

q_x est une des composantes du vecteur \vec{q} sur les trois axes (voir aussi équation (2.1) (2.3)) :

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} \vec{i} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2.20)$$

et de façon analogue pour les direction y et z.

Dans cette conditions l'équation (2.18) devient :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \frac{\dot{Q}_p}{dV} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

ou

$$\boxed{\nabla(k\nabla T) + \dot{q}_p = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}}$$

Equation (2.21) constitue la loi de FOURIER. Sa résolution (analytique ou numérique) fournit l'évolution de la température en tout point au cours du temps, si on connaît "l'état initial" et "les conditions aux limites".

$$\boxed{\dot{q}_p = \frac{\dot{Q}}{dV}} \text{ est la puissance calorifique spécifique [J/sm}^3 \text{ ou W/m}^3\text{]}$$

Cas particuliers:**- Conductivité thermique constante:**

On peut imaginer les cas où le changement du k est négligeable, donc k est constant. L'équation (2.21) devient :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\dot{q}_p}{k} \quad (2.22)$$

ou

$$\Delta T \equiv \nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\dot{q}_p}{k} \quad (2.23)$$

ΔT est le Laplacien de la fonction T et α est la diffusivité thermique :

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \left[\frac{\text{J}}{\text{s m K}} \frac{\text{m}^3 \text{kg K}}{\text{kg J}} \right] = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (2.24)$$

- Milieu inerte:

$\dot{q}_p = 0$ (toujours avec $k = \text{constante}$); Pas de production de chaleur (pas de réaction chimique, pas de transformation de phase, pas d'effet Joule). L'équation (2.23) devient:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.25)$$

-Cas de régime stationnaire

En chaque point, la température reste constante au cours du temps : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$;
donc l'équation (2.23) devient

$$\nabla^2 T = \frac{-\dot{q}_p}{k} \quad (2.26)$$

et en cas de régime stationnaire dans un milieu inerte:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.27)$$

Le Laplacien pour les coordonnées cylindriques ou sphériques est (description des coordonnées voir fig. 2.4):

- cylindrique :

$$\nabla^2 T \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.28)$$

- sphérique :

$$\nabla^2 T \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \quad (2.29)$$

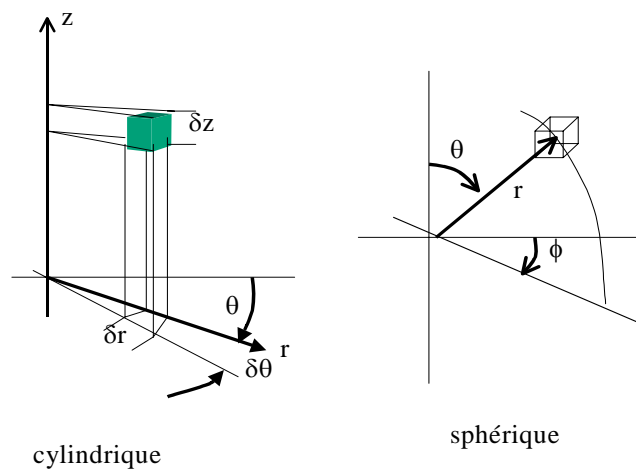


Figure 2.4 Coordonnées cylindrique et sphérique