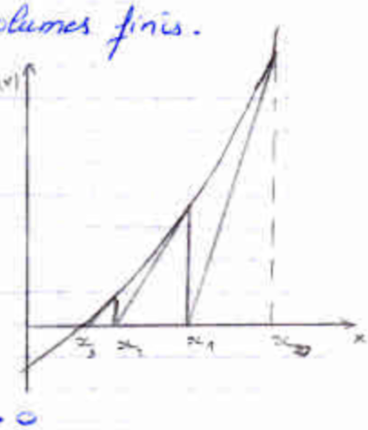
Modélisation Mathématique des phénomènes de transfert

Les méthodes appliquées : - Méthode des ≠ finis.
- Méthode des éléments finis.
- Méthode des volumes finis.

Méthode de Newton



$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{fd(x_i)}$$

Condition : - f continue - f monotone
- $f(a) \cdot f(b) < 0$ - $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

exp : Pour travailler juste avec 2 variables => plus de mémoire est écrasé les valeurs précédents

x_0	$f(x_0)$	$fd(x_0)$	x_1
100	-215,36	2,37	193,3
193,3	-104,08	0,61	362,2
362,2			

L'Algorithme de la méthode de Newton =>

Début
Lire x_0, eps, kmax
écart = eps + 1
k = 1
Tant que écart > eps et k < kmax faire
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{fd(x_0)}$
écart = $|x_1 - x_0|$
$x_0 = x_1$
k = k+1
Fin tant que
Afficher x_1, k
Fin

Equation de Frendlich : $\ln(P) = A + \frac{B}{T} + c \ln(T)$

$A = 13{,}19$; $B = -23180$; $c = -0{,}88$

$T = ?$ pour $P = 0{,}1$ bar ; $f(T) = 0$; $T \in \,]0, +\infty[$

Algorithme $A + \frac{B}{T} + c \ln(T) - \ln P = 0$

$T \in \,]0, 26000[$

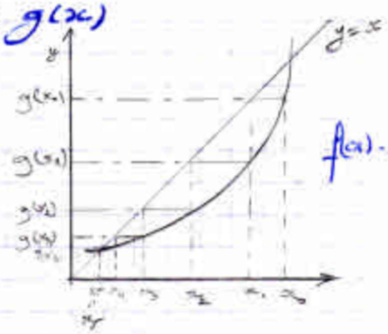
Méthode du point fixe

Principe : Remplacer l'équation : $f(x)=0$ par l'équation équivalente $x = g(x)$

Interprétation géométrique :

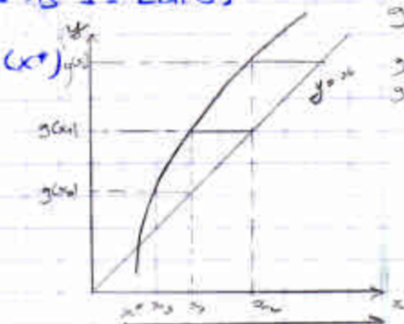
f et g : continues, dérivable ds $I = [a, b]$

$\exists\, x^* .\ f(x^*) = 0 \Rightarrow x^* = g(x^*)$

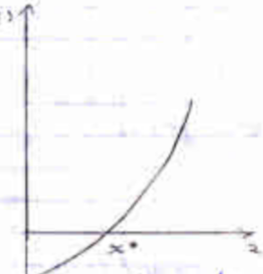


$f(a).f(b) < 0$

Cas de divergence



S'éloigner de la solution.



$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$\vdots$

$x_n = g(x_{n-1})$

Suite (x_n) de formule de récurrence : $x_{k+1} = g(x_k)$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_{n-1}) = g(\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}) = x^*$ car g est continue

Théorème :

Soit la fonction $g(x)$ définie continue et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.

Si pour $a < x < b$; $|g'(x)| < 1$, le processus itératif converge vers l'unique racine de l'équation $x = g(x)$ $\forall x_0$ (Pt de départ)

L'Algorithme de la méthode de "PF" eps : précision, k : itération

$|x - x_0| < \varepsilon$ arrêt du processus itératif

```
Début
Lire x0, eps, kmax
Delta ← eps + 1
k ← 0
Tant que (Delta > eps et k < kmax) faire
    k ← k+1
    x ← g(x0)
    Delta ← abs(x - x0)
    x0 ← x
Fin tant que
Afficher x, g(x), k, Delta
Fin
```

exp : Soit $f(x) = x^3 - 4x + 2 \quad x \in \mathbb{R} \qquad I = [1/2, 1] = [a, b]$

f : déf, continue et dérivable d/s I, $f(1) = -1$ et $f(1/2) = 1/8$

donc : $f(1) \cdot f(1/2) < 0 \Rightarrow \exists x^*, f(x^*) = 0$.

On cherche de l'équation équivalente : $x = g(x)$: $x = \frac{2}{4 - x^2} = g(x)$

$1/2 \leq x < 1$, $g'(x) = \frac{4x}{(4-x^2)^2} \qquad g'(1) = \frac{4}{9} < 1$ et $g'(1/2) = \frac{32}{15^2} < 1$

Programme de la méthode de "PF"

```
Program Point fixe
Real eps, ecart, x0, x
Print*, 'eps = ', ' kmax = '
Read*, eps, kmax
Print*, 'x0 = '
Read*, x0
k=0
écart = 1 + eps
Dowhile (ecart.GT.eps.And.k.LT.kmax)
   k = k+1
   x = g(x0)
   ecart = abs(x-x0)
   x0 = x
End do
Print*, 'x=', x, 'k=', k
Print*, 'ecart=', ecart
End
c Sous programme de type fonction
Real function g(x)
   g = 2/(4-x**2)
```

Si on veut chercher $g'(x) < 1$ on écrit ce programme à la place de Print et Read x_0

```
Print*, 'x='
Read*, x
y = gd(x)
If (abs(y).LT.1) then
   x0 = x
   Print*, 'x0=', x0, 'y=', y
Else
   goto 10
End if
```

```
return
End
Real function gd(x)
   gd = 4*x/(4-x**2)**2
Return
End
```

L'exécution

eps = 1e-2 kmax = 100

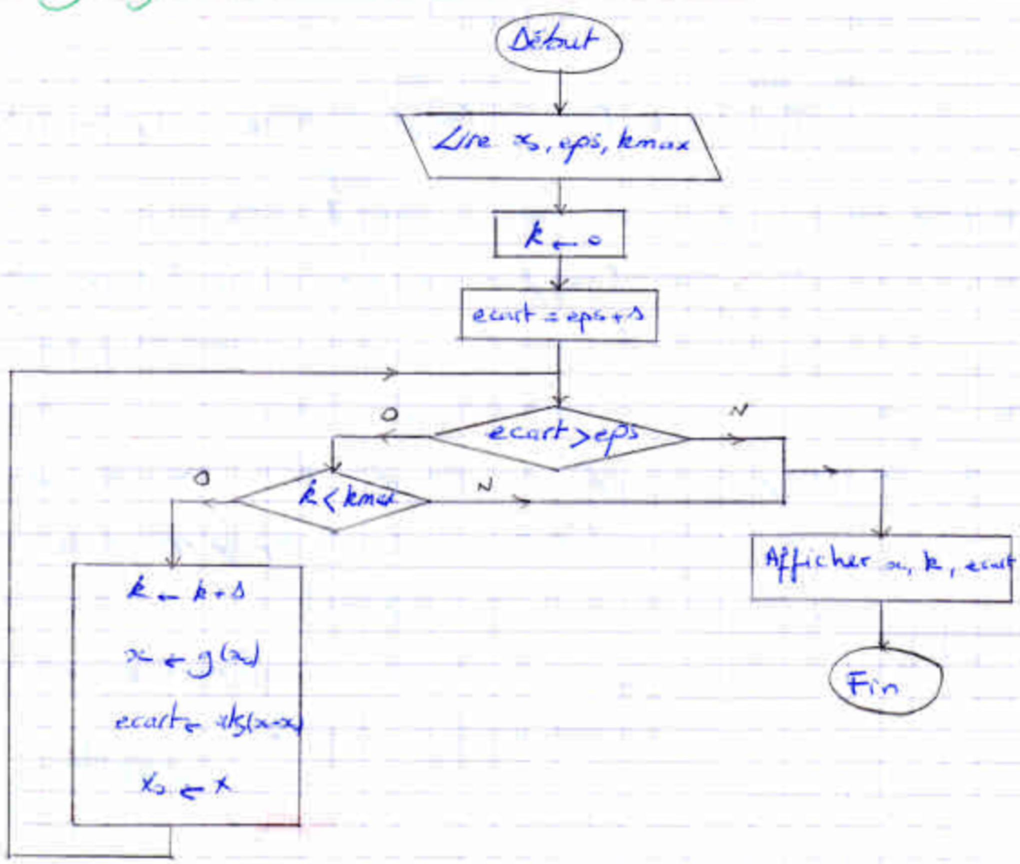
x_0 = 1

$x = 5{,}397809e-01$ $k = 4$

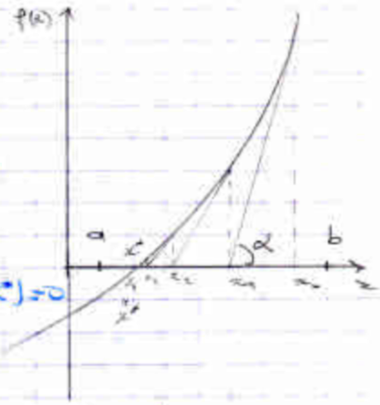
$x^* \simeq 0{,}54 \pm$ écart

écart $= 3{,}167e-05 < 10^{-2}$

L'organigramme de la méthode de "PF"



Méthode de Newton



Géométrie ⇒

Hypothèses

Soit f et f' définis dans $[a,b]$ continues et monotones dans $[a,b]$

$f'(x) \neq 0$; $f(a) \cdot f(b) < 0$. $\exists\, x^* \in [a,b] : f(x^*) = 0$

Equation de la tangente : $y = f'(x_0)\, x + b$

- pour $x = x_0$: $y = f(x_0) \rightarrow f(x_0) = f'(x_0)\, x_0 + b$

donc : $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$; $y = f'(x_0)\, x + f(x_0) - f'(x_0)\, x_0$

- au point $x = x_1$: $y = 0$ donc $f(x_1) = 0$

$\rightarrow 0 = f'(x_0)\, x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \Rightarrow f'(x_0)\, x = f'(x_0)\, x_0 - f(x_0)$

d'où : $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ avec : $f'(x_0) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

<u>Autrement</u> : $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = f'(x_0) = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0}$

$\Rightarrow (x_0 - x_1)\, f'(x_0) = f(x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

<u>Par recurrence</u> $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

<u>choix du pt de départ x_0</u>

Pour assurer la convergence on choisira x_0 tel que la condition de Fourier soit vérifiée à savoir : $f''(x_0) \cdot f(x_0) > 0 \quad (x_0 \in [a,b])$

<u>L'Algorithme de la méthode de Newton</u>

Début

Réel x, eps, ecart, f(x), fd(x)

Entier k, kmax

Lire x0, eps, kmax, f(x), fd(x)

ecart ← eps + 1

$k \leftarrow 0$

Tant que (ecart > eps et $k \leq kmax$) faire

  $k \leftarrow k+1$

  $x \leftarrow x_0 - f(x_0) / fd(x_0)$

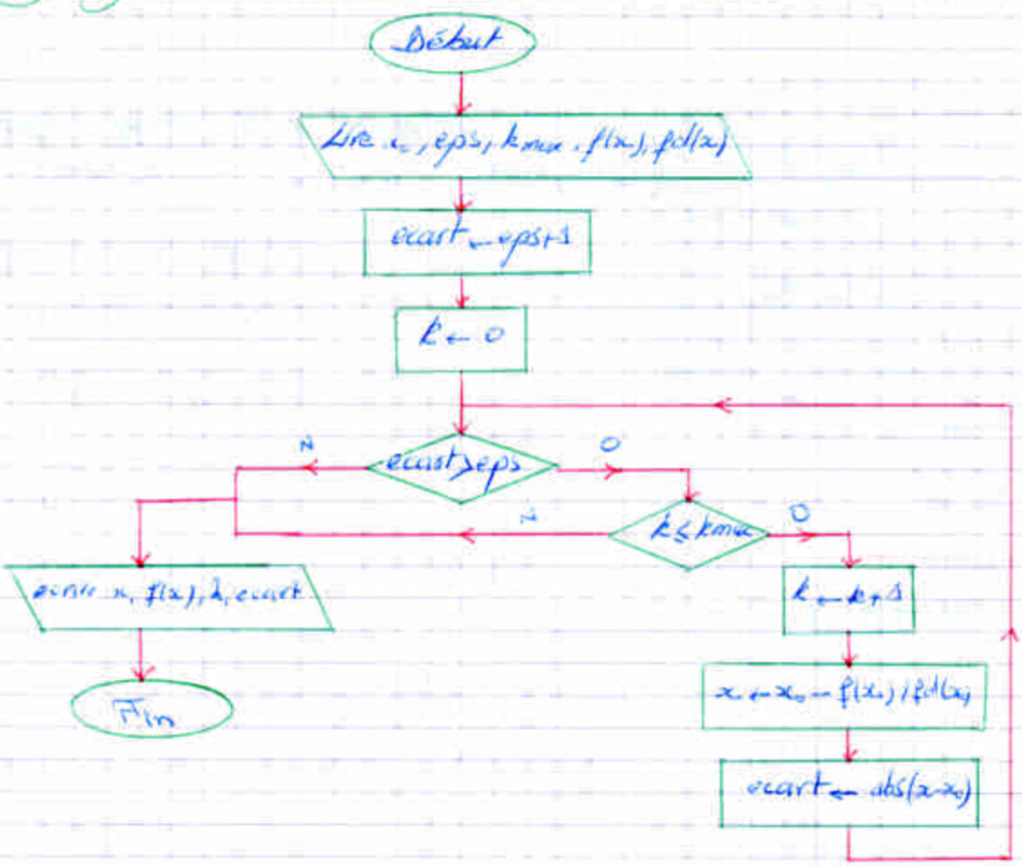
  ecart $\leftarrow$ abs$(x - x_0)$

Fin tantque

Ecrire x, $f(x)$, k, ecart

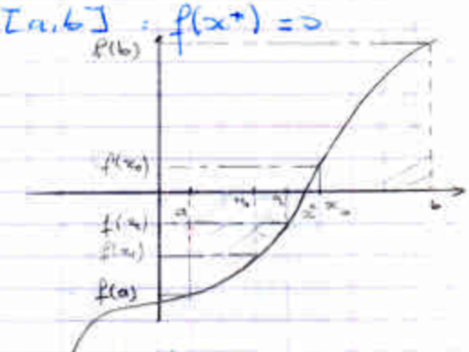
Fin

L'Organigramme de la méthode de Newton



Méthode dichotomique

Théorème : Si f est une fonction définie, continue et monotone sur $[a,b]$ avec $f(a)\cdot f(b) < 0$ alors $\exists\ x^* \in [a,b]$: $f(x^*) = 0$



Géométrie : $[a,b] = I$

Intervalle initial

On pose : $a = a_0$, $b = b_0$ $[a_0, b_0] = I_0$

$x_0 = (a_0 + b_0)/2$ (Milieu du segment $[a_0, b_0]$)

Si $(f(a_0)\cdot f(x_0)) < 0$ alors

$[a_0, x_0] = [a_1, b_1] = I_1 = I_0/2$

On élimine $[x_0, b]$

Sinon

$[x_0, b] = [a_1, b_1] = I_1$

On élimine $[a_0, x_0]$

Par itération on obtient une suite.

$x_k = (a_k + b_k)/2$ $k = 1, n$ $I_k = [a_k, b_k]$

Critère d'arrêt du processus itératif

$b_{k+1} - a_{k+1}$ ou bien

$$\frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+n}}$$

a	b	x	f(a)	f(x)	b-a
100	2000	1050	-215	-7.7	1900
1050	2000	1525	-7.7	-1.5	950
1525	2000	1762	1.1	0.70	475

L'Algorithme de la méthode de dichotomie

Début

Lire a, b, eps

Tant que $|b-a| \geq$ eps faire

$x = (a+b)/2$

Si $f(a)\cdot f(x) > 0$ alors $a = x$

sinon $b = x$

Fin si

Fin tant que

Afficher x

Fin

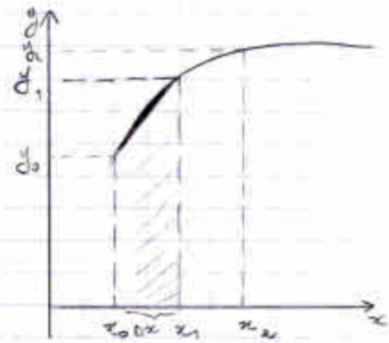
On peut faire la condition soit par :

Tant que $|b-a| >$ eps faire

ou

Tant que $|f(x)| >$ eps faire

Methode de Trapèz



$$\Delta x\, y_0 + \Delta x\,(y_1 - y_2)/2 \;=\; \Delta x \left(\frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} \right)$$

$$\Delta x \left[\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdots \right]$$

$$\Delta x \left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + \frac{y_n}{2} \right]$$

$$\Delta x \left[\frac{y_A + y_B}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right] \qquad n = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Methode de Simpson