Chapitre II

Classification des Equations de Dérivées Partielles "EDP"

EDP du 2^{nd} ordre à deux variables indépendantes x et y.

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+D\frac{\partial\phi}{\partial x}+E\frac{\partial\phi}{\partial y}+F\phi=G(x,y)$$

où : $\phi=\phi(x,y)$ fonction recherchée dépendante de x et y

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=f\left(x,y,\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$$

II. 1 Classification au sens mathématique

Selon le signe du déterminant B^2-4ac on adopte le classement suivant :

$B^2-4ac<0$ l'équation est dite elliptique.

$B^2-4ac>0$ ———— hyperbolique.

$B^2-4ac=0$ ———— parabolique.

Ce classement est important pour le choix du type de résolution.

* Equation de Laplace : $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$

$A=1$; $B=0$; $C=1$ $\quad B^2-4AC=-4<0$ équat° de Laplace est elliptique.

* Equation de conduction instationnaire de la chaleur :

$\alpha\frac{\partial^2T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t}$ $\quad A=\alpha$; $B=0$; $C=0$ $\quad B^2-4AC=0$

équation parabolique.

* Equation des ondes : $\frac{\partial^2Y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2Y}{\partial x^2}$

$\Rightarrow c^2\frac{\partial^2Y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2Y}{\partial t^2}=0$ $\quad A=c^2$, $B=0$, $C=1$

$B^2-4AC=\frac{4}{c^2}>0$ équation hyperbolique

Variable à double influence

Une coordonée independante est dite à double influence si la variable ϕ à une position donnée relative à cette coordonnée est influencée par un changement des conditions de part et d'autre de cette position.

exp : En conduction dans un milieu fini, les coordonnées spaciales sont à double influence. Ceci veut dire, la dérivée d'ordre 2 / à cette coordonnée existe. Par conséquent, deux condition sont nécessaires lors de l'integration (l'influence d'un changement dans les condit peut provenir d'un côté et de l'autre)

Variable à simple influence

Coordonnée independante est dite à simple influence si la variable ϕ à une position donnée relative à cette coordonnée n'est influencée que par un changement dans des conditions d'un seul côté de cette position.

exp. La T^{re} T_0 d'un solide à un instant t_0 ne peut être influencée que par les conditions antérieures à t_0.

Seule la dérivée d'ordre 1 / à cette coordonnée, une seule condition, relativement à cette coordonnée est nécessaire lors de l'intégration.

Temps est une coordonnée à simple influence.

- Position : Généralement à double influence.

Classification

- Si toutes les variables independantes sont à double influence EDP elliptique
- Si au moins une variable independante est à simple influence l'équation est dite parabolique.

II.3 Classification des problèmes aux limites

Dirichlet : conditions sur ϕ aux bornes du domain.

Neuman ou Cauchy : on impose ϕ et $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ sur la frontière du domaine ou aura par conséquent une condition de flux.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \alpha \phi \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = 0 \text{ condit}^{\circ} \text{ de flux de type Neuman.} \\ \alpha \neq 0 \text{ condition de flux de type Cauchy.} \end{array} \right.$$