chapitre III

Méthodes de discrétisation

consiste à traduire les équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques :

- Différences finis.
- volumes finis.
- éléments finis.

III. 1 Différences finis

1. 1 Expression des dérivées premières et secondes

a) Développement en série de taylor

Si une fonction $f(x)$ est analytique, indéfiniment dérivable au voisinage d'un point $x=x_0$, alors cette fonction peut être approchée par une fonction polynomiale écrite sous la forme d'une série convergente que l'on appelle Série de Taylor.

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n$$

R_n : Erreur de troncature. $O(x-x_0)^{n+1}$

b) Dérivée d'ordre 1

un maillage, noeuds

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{1}{3!} \Delta x^3 \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + O(\Delta x^4)$$

Si on s'arrête au 2ème terme.

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} + \boxed{\frac{\Delta x}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\phi_{i-1} = \phi_i - \Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{1}{2!} (-\Delta x)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

On a approché la dérivée première par un schéma regressif d'ordre un.

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{1}{3!} \Delta x^3 \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i$$

$$\phi_{i-1} = \phi_i - \Delta x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i + \frac{1}{2!}\Delta x^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{1}{3!}\Delta x^3\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_i$$

$$\phi_{i+1} - \phi_{i-1} = 2\Delta x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i + \frac{2}{3!}\Delta x^3\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_i$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1}-\phi_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3!}\Delta x^2\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_i$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1}-\phi_{i-1}}{2\Delta x} + \Theta(\Delta x^2)$$

On a approché la dérivée première par un shéma centré d'ordre 2.

Application : En considerant un pas $\Delta x = 0.1$, calculer par un shéma de difference finies, $f'(x)$ au point $x=2$ pour $f(x)=x^2$

$x_i = 2$, $\Delta x = 0.1$; $f(x_i) = x_i^2$

$x_{i+1} = x_i + \Delta x = 2.1$; $x_{i-1} = x_i - \Delta x = 1.9$

$f(x_i) = f(2) = 4$; $f_{i+1} = f(2.1) = 4.41$; $f_{i-1} = f(1.9) = 3.61$

a- difference finie en progressif

$f_i' = \frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x} = \frac{4.41-4}{0.1} = 4.1$; ecart $= |4.1 - 4| = 0.1$

b- regressif

$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} = \frac{4-3.61}{0.1} = 3.9$

c- Centrée

$f_i' = \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{4.41-3.61}{2\times0.1} = 4$

Dérivée d'ordre 2

Schéma progressif : $\phi_{i+1} = f(x_i+h)$, $\phi_{i+2} = f(x_i+2h)$

$\Delta x = h$, $2\Delta x = 2h$; $\phi_i = f(x_i)$

$f(x_i+h) = f(x_i) + h f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i)$

$f(x_i+2h) = f(x_i) + 2h f'(x_i) + \frac{4h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{8h^3}{3!} f'''(x_i)$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_i+h) + f(x_i+2h)}{h^2} + \Theta(h)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_i - 2\phi_{i+1} + \phi_{i+2}}{\Delta x^2} + \Theta(\Delta x)$$

Schéma régressif on développe ϕ_{i-1} et ϕ_{i-2} :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i-2} - 2\phi_{i-1} + \phi_i}{\Delta x^2} + \Theta(\Delta x)$$

Schéma centré ϕ_{i+1} et ϕ_{i-1} : $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \dfrac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{(\Delta x)^2} + \Theta(\Delta x^2)$

Exp

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -1 \qquad \text{sur } [0, 1] \qquad T(0) = T(1) = 0$$

$\dfrac{dT}{dx} = -x + a \;\therefore\; T = -\dfrac{x^2}{2} - x - a$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = -h^2$$

$T(0) - 2T(1) + T(2) = -h^2$

$T(1) - 2T(2) + T(3) = -h^2$

Application

100°c ▭ 200°c $\qquad L,\ k,\ c^{tes},\ q$

$n = 5,\ L \qquad \Delta x = \dfrac{L}{n-1}$

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q = 0 \qquad k \cdot \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} + q = 0$$

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} + q\frac{\Delta x^2}{k} = 0$$

nœuds 1 : $T_1 = 100°c$

nœuds 2 : $T_1 - 2T_2 + T_3 = -q\dfrac{\Delta x^2}{k}$

nœuds 3 : $T_2 - 2T_3 + T_4 = -q\,\Delta x^2/k$

nœuds 4 : $T_3 - 2T_4 + T_5 = -q\,\Delta x^2/k$

nœuds 5 : $T_5 = 200°c$

forme tridiagonale $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \text{ THOMAS}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ 0 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ 0 + 0 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

[ ] TDMA : tridiagonal Matrix Algorithm.

$$\begin{cases} 2T_2 = T_1 + T_3 + b \\ 2T_3 = T_2 + T_4 + b \\ 2T_4 = T_3 + T_5 + b \end{cases}$$

donc : $T_i = f(T_{i-1}, T_{i+1}) \rightarrow T_i = f(T_{i-1})$

TDMA est une méthode directe.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{cases} a_1 T_1 - b_1 T_2 = d_1 \\ -c_2 T_1 + a_2 T_2 - b_2 T_3 = d_2 \\ -c_3 T_2 + a_3 T_3 - b_3 T_4 = d_3 \\ -c_4 T_3 + a_4 T_4 - b_4 T_5 = d_4 \\ -c_5 T_4 + a_5 T_5 = d_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2T_1 + 3T_2 = 4 \\ 3T_1 + 4T_2 + 6T_3 = 2 \\ 5T_2 + T_3 + 2T_4 = 1 \\ T_3 + 2T_4 + T_5 = 7 \\ 7T_4 + 6T_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2T_1 = -3T_2 + 4 \\ 4T_2 = -3T_1 - 6T_3 + 2 \\ T_3 = -5T_2 - 2T_4 + 1 \\ 2T_4 = -T_3 - T_5 + 7 \\ 6T_5 = -7T_4 + 2 \end{cases}$$

$$a_1 T_1 = b_1 T_2 + d_1$$
$$a_2 T_2 = b_2 T_3 + c_2 T_1 + d_2$$
$$\vdots$$
$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} T_{n-1} = b_{n-1} T_n + c_{n-1} T_{n-2} + d_{n-1}$$
$$a_n T_n = b_n T_{n+1} + c_n T_{n-1} + d_n$$

donc : $T_i = f(T_{i-1}, T_{i+1})$ d'où $T_i = f(T_{i+1})$

$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \rightsquigarrow$ Objectif : déterminer P_i et Q_i

$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i = b_i T_{i+1} + c_i (P_{i-1} T_i + Q_{i-1}) + d_i$

donc : $T_i = \dfrac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} T_{i+1} + \dfrac{c_i Q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i P_{i-1}}$

de (1) et (2) on a : $P_i = \dfrac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}$; $Q_i = \dfrac{c_i Q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i P_{i-1}}$

<u>équat° 1</u> $a_1 T_1 = b_1 T_2 + d_1$

$$T_1 = \frac{b_1}{a_1} T_2 + \frac{d_1}{a_1} \quad ; \quad P_1 = \frac{b_1}{a_1} \; ; \; Q_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

<u>dernière équat°</u> $a_n T_n = c_n T_{n-1} + d_n$ et : $T_{n-1} = P_{n-1} T_n + Q_{n-1}$

donc : $a_n T_n = c_n P_{n-1} T_n + c_n Q_{n-1} + d_n$

$$T_n = \frac{c_n Q_{n-1} + d_n}{a_n - c_n P_{n-1}} = Q_n$$

$P_1 = b_1 / a_1$, $Q_1 = d_1 / a_1$

Pour $i = 2$ à n faire

$$Q_i = \frac{c_i Q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad , \quad P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}$$

$T_n = Q_n$

Exp. $n = 5$
L'exemple précédent

i	a	b	c	d	P	Q	T
1	2	-3	0	4	-1,5	2	6,39
2	4	-6	-3	2	12	3	-3,26
3	1	-2	-5	1	-0,53	-0,64	-3,39
4	2	-1	-1	7	-0,33	3,38	3,13
5	6	0	-7	2	0	-10,31	-10,31

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad , \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad , \quad Q_i = \frac{c_i Q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i P_{i-1}}$$

$$T_i = P_i \, T_{i+1} + Q_i$$

Le programme de la matrice tridiagonale

```
Program Tdma
Parameter (m=100)
Real a(m), b(m), c(m), d(m), P(m), Q(m), T(m)
Print*, 'n='
Read*, n
Print*, 'a(1)='
Read*, a(1)
Print*, 'b(1)='
Read*, b(1)
Print*, 'd(1)='
Read*, d(1)
Do i=2, n-1
   Print*, 'a(',i,')='
   Read*, a(i)
   Print*, 'b(',i,')='
   Read*, b(i)
   Print*, 'c(',i,')='
   Read*, c(i)
   Print*, 'd(',i,')='
   Read*, d(i)
End do
Print*, 'a(',n,')='
Read*, a(n)
Print*, 'c(',n,')='
Read*, c(n)
Print*, 'd(',n,')='
Read*, d(n)
P(1) = b(1) / a(1)
Q(1) = d(1) / a(1)
Do i=2, n
   Q(i) = (c(i) * Q(i-1) + d(i)) / (a(i) - c(i) * P(i-1))
   P(i) = b(i) / (a(i) - c(i) * P(i-1))
End do
T(n) = Q(n)
Do i=n-1, 1, -1
   T(i) = P(i) * T(i+1) + Q(i)
End do
Do i=1, n
Print*, 'T(',i,')=', T(i)
End do
End
```

$\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{dY}{dx} = 1$ sur $[0, 5]$, $Y(0) = 2$, $Y(5) = 10$

Schéma centré :

- Donner les équat° qui permettent de calculer les Y_i pour un pas $h = 1$
- Rédiger l'algorithme de résolut°.
- Appliquer pour h, (n : nbre de noeuds donné)

Solution :

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}}{h^2} \quad ; \quad \frac{dY}{dx} = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h}$$

donc : $$\frac{Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}}{h^2} + \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}) + h(Y_{i+1} - Y_{i-1}) = 2h^2$$

$$\Leftrightarrow (2-h)Y_{i-1} + (2+h)Y_{i+1} - 4Y_i = 2h^2$$

$$\Leftrightarrow 4Y_i = (2+h)Y_{i+1} + (2-h)Y_{i-1} - 2h^2$$

Noeuds 1 : $Y_1 = 2$

$$4Y_2 = Y_1 + 3Y_3 - 2$$
$$4Y_3 = Y_2 + 3Y_4 - 2$$
$$4Y_4 = Y_3 + 3Y_5 - 2$$
$$4Y_5 = Y_4 + 3Y_6 - 2$$

Noeuds 6 : $Y_6 = 10$

$$Y_1 = 0Y_2 + 2 \qquad a_1 Y_1 = b_1 Y_2 + \dots + d_1$$
$$4Y_2 = 3Y_3 + Y_1 - 2 \qquad a_2 Y_2 = b_2 Y_3 + c_2 Y_1 + d_2$$
$$\Rightarrow \quad 4Y_3 = 3Y_4 + Y_2 - 2$$
$$4Y_4 = 3Y_5 + Y_3 - 2$$
$$4Y_5 = 3Y_6 + Y_4 - 2 \qquad a_n Y_n = c_n Y_{n-1} + d_n$$
$$Y_6 = 0Y_5 + 10$$

$a(1) = 1$; $b(1) = 0$. $d(1) = 2$, $c(1) = 0$

Pour $i = 2$ à $n-1$

$a(i) = 4$; $b(i) = 3$, $c(i) = 3$, $d(i) = -2$

fin pour

$a(w) = 1$, $b(w) = 0$, $d(w) = 10$, $c(w) = 0$

nbre

L'algorithme (en utilisant h) :

lire n

$$h = \frac{L}{n-1}$$

pour $i = 2, n-1$

$a(i) = 4$

$b(i) = 2+h$

$c(i) = 2-h$

$d(i) = -2h^2$

3-1-2. Consistance : on aboutit à l'équation discrétisée en commettant une erreur de troncature, si cette erreur tend vers zéro lorsque $h \to 0$ le schéma de discrétisation est consistant

exemple. $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

discrétisée en utilisant le schéma Dufort - Frankel

$\theta(\Delta x^2) + \theta(\Delta t^2) + \theta\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$ $\quad \Delta t \ll \Delta x$