Chapitre IX

Equations elliptiques

Toutes les variables indépendantes.

exp : Conduct° stationnaire.

1- Conduct° stationnaire 1D :

Equation gouvernante : $\frac{d}{dx}\left(k\left(\frac{dT}{dx}\right)\right) + S = 0$

k constant : $k\frac{d^2T}{dx^2} + S = 0 \leadsto \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{S}{k} = 0$

Problème Dirichlet. T^{R} aux extrémités connues.

Soit : n : nbre de nœuds ; L : longueur de l'élément ; $\Delta x = \frac{L}{n-1}$

exp : Tige longueur 20 mm ; $k = 0,5$ W/m/K

$T(a) = 100°C$; $T(b) = 200°C$; $n = 5$

$\Delta x = \frac{20}{5-1} = \frac{20}{4} = 5\ mm = 5.10^{-3}\ m$

nœuds concentrés $\overline{2,4}$

$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + \frac{S}{k} = 0 \iff 2T_i = T_{i+1} + T_{i-1} + \frac{Sh^2}{k}$

$T_1 = 0.T_2 + 373$ — ① $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $d_1 = 373$

$2T_2 = T_3 + T_1 + \frac{Sh^2}{k}$ — $i = \overline{2,4}$

$2T_3 = T_4 + T_2 + Sh^2/k$ — $a_i = 2$, $b_i = 1$, $c_i = 1$; $d_i = \frac{Sh^2}{k}$

$2T_4 = T_5 + T_3 + Sh^2/k$ — ⑤ $a_5 = 1$, $c_5 = 0$, $d_5 = 473$

$T_5 = 0.T_4 + 473$

Problème de Neumann

exp précédent : $x = 0$; $\frac{\partial T}{\partial x} = \ell$, $x = L$; $T(5) = 200°C$

Si $P = 0$; $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

On ajoute un nœud (appelé nœud zéro) avant le nœud 1

Equation des différences finies centrées de la 1ère dérivée.

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{T_2 - T_0}{2h} = \varphi \rightsquigarrow T_0 = T_2 - 2\varphi h$$

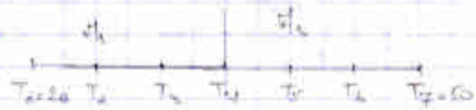
noeud 1 : $\frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{h^2} + S/k = 0$ $\qquad 2T_1 = 2T_2 + \frac{Sh^2}{k} - 2\varphi h$

Le reste des noeuds identiques à l'exemple de Dirichlet.

Cas de 2 matériaux différents

ex : Matériau 1 = k_1, S_1

Matériau 2 = k_2, S_2



Rq : Un noeud est obligatoire au niveau de l'interface

h = identique.

- interface au niveau de T_4 ; supposons $T_4 = \alpha$

Matériau 1

$$\frac{d}{dx}\left(k_1 \frac{dT}{dx}\right) = k_1 \frac{d^2T}{dx^2} \rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{S_1}{k_1} = 0 \rightsquigarrow 2T_i = T_{i+1} + T_{i-1} + \overbrace{\frac{S_1h^2}{k_1}}^{Y_1}$$

$T_1 = 0.T_2 + 293$

$2T_2 = T_3 + T_1 + Y_1$

$2T_3 = T_4 + T_2 + Y_1$

$T_4 = 0.T_3 + \alpha$

Matériau 2

$$2T_i = T_{i+1} + T_{i-1} + \underbrace{\frac{S_2h^2}{k_2}}_{Y_2}$$

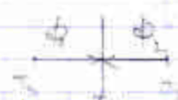
$T_4 = 0.T_5 + \alpha$

$2T_5 = T_6 + T_4 + Y_2$

$2T_6 = T_7 + T_5 + Y_2$

$T_7 = 0.T_6 + 323$

à l'interface les flux sont égaux



$\varphi_1 = -\varphi_2$ avec $\varphi = -k\frac{dT}{dx}$; $\varphi_1 = -k_1 \frac{T_4 - T_3}{h}$; $\varphi_2 = -k_2 \frac{T_4 - T_5}{h}$

$$\frac{k_1 + k_2}{h} T_4 = \frac{k_1}{h} T_3 + \frac{k_2}{h} T_5 \iff (k_1 + k_2) T_4 = k_1 T_3 + k_2 T_5$$

Système global

$T_1 = 0.T_2 + 293$

$2T_2 = T_3 + T_1 + Y_1$

$2T_3 = T_4 + T_2 + Y_1$

$(k_1 + k_2) T_4 = k_1 T_3 + k_2 T_5$

$2T_5 = T_6 + T_4 + Y_2$

$2T_6 = T_7 + T_5 + Y_2$

$T_7 = 0.T_6 + 323$

2- Conduction stationnaire 2D

L est portant le même, équation gouvernante : $k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + S = 0$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{S}{k} = 0$$

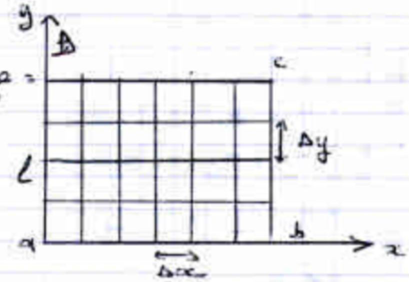
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ Relation de Laplace on la trouve dans :

- écoulement laminaire fluide visqueux
- incompressible.
- conduction stationnaire.

2-1 Maillage

conditions aux limites sur les frontières du domaine rectangulaire (L, l), problème Dirichlet.

La maillage :



$T(x,0) = T_{ab}$, $T(L,y) = T_{bc}$

$T(0,y) = T_{aD}$, $T(x,l) = T_{Dc}$

$m = \frac{L}{\Delta x} + 1$ (nbre de noeud suivant x)

$n = \frac{l}{\Delta y} + 1$ (nbre de noeud suivant y)

$i = 1, m$

$t(i,0) = T_{ab}$

$t(i,l) = T_{Dc}$

Schémas centrées des différences finies : $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{h^2}$

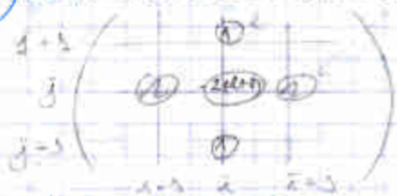
$$\oplus\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} \end{cases}$$

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

On multiplie les deux therme par Δy^2 et on suppose que $\lambda = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$

$\lambda T_{i-1,j} - 2(\lambda+1) T_{i,j} + \lambda T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} = 0$

Sous la forme moléculaire en 1 point i,j



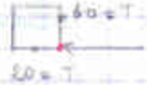
On ne peut pas la résoudre en méthode TDMA car : $T = f(T_{i-1}, T_{i+1})$

expl : $m = 5$, $n = 4$ nbre total de noeuds = 20

(tout ce qui est à l'extrémité je le connait par contre à l'intérieur je le connait pas)

Nombre de noeuds internes $(m-2)(n-2) = 6$

$\lambda = 1$

exp :  la T^{re} ici est intermediaire entre (20°C et 60°C)

Aux frontière :

$T(i,1) = T_{ab}$ $(i = 1;5)$; $T(i,4) = T_{cd}$ $(i = 1,5)$

$T(1,j) = T_{ad}$ $(j = 1,4)$; $T(5,j) = T_{bc}$ $(j = 1,4)$ $j = 2$, $i = 2, m-1$

Point 2,2 :

$-4T_{22} + \overset{T_{ab}}{\cancel{T_{21}}} + T_{23} + T_{32} + \overset{T_{ad}}{\cancel{T_{12}}} = 0$

$-4T_{22} + T_{23} + T_{23} = -(T_{cd} + T_{ab})$

Point 3,2 : $-4T_{32} + T_{22} + T_{42} + T_{33} = -T_{ab}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{22} \\ T_{32} \\ T_{42} \\ T_{23} \\ T_{33} \\ T_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(T_{ab} + T_{ad}) \\ -T_{ab} \\ -(T_{ab} + T_{bc}) \\ -(T_{ad} + T_{cd}) \\ -T_{cd} \\ -(T_{bc} + T_{cd}) \end{pmatrix}$$

Résolution $f(x)=0$ méthodes itératives

$x_1^{(0)}=0$
$x_2^{(0)}=0$
$x_3^{(0)}=0$

méthode de Jacobi

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = (-3 + x_2 - x_3)/2$

$x_2 = (1 - 3x_1 + 2x_3)/5$

$x_3 = (0 - x_1 + 4x_2)/10$

Gauss Seidel amélioration de Jacobi du pt de vue convergence.

1ère itérat°

$X_1^{(1)} = (-3+0-0)/2 = -1,5$

$X_2^{(1)} = (1-3.0+2.0)/5 = 1/5$

$X_3^{(1)} = 0$

après 15 itérations

$X_1^{(15)} = -1,21$

$X_2^{(15)} = -1,16$

$X_3^{(15)} = 0,58$

On utilise la méthode de Gauss Seidel, Jacobi si la matrice est diagonale dominante $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

Si on inverse les équations on n'aura pas les mêmes valeurs précédentes. exp :

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Ecart entre 2 itérations successives $<$ eps , eps $= 1$

$X_1^{(0)} = 0$, $X_2^{(0)} = 0$, $X_3^{(0)} = 0$ $\qquad |X_1^{(1)} - X_1^{(0)}| = 1,5 \qquad |X_2^{(1)} - X_2^{(0)}| = 0,2$

$X_1^{(1)} = -1,5$, $X_2^{(1)} = 1/5$, $X_3^{(1)} = 0$ $\qquad |X_3^{(1)} - X_3^{(0)}| = 0$

écart $= |x_i^{k+1} - x_i^k|$
Do $i = 1, n$
si $|x_i^{k+1} - x_i^k| >$ écart
alors écart $= |x_i^{k+1} - x_i^k|$

Algorithme Gauss Seidel

Lire n, a, j, b, kmax, eps

pour i = 1 à n faire $z(i) = 0$

k = 0 , ecart = eps + 1

tant que (ecart > eps et k < kmax) faire

k = k+1 , ecart = 0

pour i = 1 à n faire

c = 0

pour $j = 1$ à n faire

Si $j \neq i$ alors $c = c + a_{ij} * z_j$

fin pour

$x_i = (b_i - c)/a_{ii}$

$R = |x_i - z_i|$

Si $R >$ ecart alors ecart $= R$

$z_i = x_i$

fin pour

Fin pour

$X_1 = (-3 + X_2 - X_3)/2$

$X_1 = (\underbrace{-3}_{b_i} - \underbrace{(-X_2 + X_3)}_{c})/\underbrace{2}_{a_{ii}}$

$c = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} z_j$

ecart	R	X_1	X_2	X_3	z_1	z_2	z_3
0	1,5	-1,5	0,2	0,23	0	0	0
1,5	0,2				-1,5	0,2	0,23

pr $i = 2$ $c = a_{21} z_1 + a_{23} z_3$