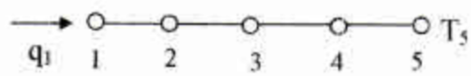
Faculté GMPGP MMPT EMD Février 2010

Exercice 1 (10pts) : Soit un problème de conduction unidimensionnelle avec une conduction thermique K=2.5 et un terme source S= 1500. Les conditions aux limites sont $T_5 = 500$ et le flux de chaleur au niveau du nœud 1 est q_1= 1200.

1- En utilisant un maillage uniforme, discrétiser l'équation de conduction en utilisant un schéma centré.
2- Donner l'algorithme de résolution (méthode TDMA)
3- Déterminer les valeurs de T2, T3, T4 et T5.



Exercice 2 (10 pts) : L'équation de conduction dans une barre est donnée par :

$$\frac{d}{dX}\left(k\frac{dT}{dX}\right) = 0$$

La conductivité est définie de la manière suivante :

$$K = \begin{cases} K1 \quad \text{pour } 0 < X < L/3 \text{ et } 2L/3 < X < L \\ K2 \quad \text{pour } L/3 < X < 2L/3 \end{cases}$$

Les conditions aux limites sont définies comme suit : X=0 T= To ; X= L T= T_L

En utilisant un maillage uniforme pour 7 nœuds et un schéma centré :

- Placer les nœuds dans le domaine d'étude.
- Discrétiser l'équation de conduction
- Donner l'algorithme de résolution
- Rédiger le programme de résolution pour les données suivantes :
  K1= 1 ; K2=3 ; To=293, TL= 373; L=1.2

GENIE DES PROCEDES fan page

Rappels

Schéma centré : $\dfrac{\partial \Phi}{\partial X} = \dfrac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2h}$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{h^2}$$

Algorithme de Gauss-Seidel

Lire n, a(i,j), b(i), eps, kmax
Pour i=1 à n faire
| Zi = 0
Fin pour
K=0
Ecart=eps+1
Tant que k< kmax et ecart>eps faire
| Ecart=0 ; K=k+1
| Pour i = 1 à n faire
| | $x(i) = (b(i) - \sum_{j=1 \text{ et } j \neq i}^{n} a(i,j) * z(j))$
| | Rm=abs(Xi-Zi)
| | Si Rm > ecart alors ecart= Rm
| | Z(i) = X(i)
| Finpour
Fin tant que
Imprimer Xi, k

Algorithme TDMA : $a_i . T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i$

$p_1=b_1/a_1$; $q_1=d_1/a_1$
pour i=2 à n-1 faire :
$p_i = b_i/(a_i - c_i . p_{i-1})$
$q_i = (c_i . q_{i-1} + d_i)/(a_i - c_i . p_{i-1})$
fin pour
$T_n=(c_n . q_{n-1} + d_i)/(a_n - c_n . p_{n-1})$
pour i= n-1 à 1 faire
$T_i = p_i . T_{i+1} + q_i$
Fin pour
Afficher T_i
fin

GENIE DES PROCEDES fan page

Corrigé de la 1ère EMD de
Modélisation des phénomènes de Transfert

Exercice 1:

Données:

$k = 250$, $S = 1500$, $T_5 = 500$, $q_1 = 1200$

$n = 5$, $L = 4$ $\Rightarrow$ $h = \dfrac{L}{n-1} = 1$

Domaine physique:

Maillage uniforme:

$x_1 = 0$ et $x_n = L$

$x_i = x_1 + (i-1)h$ avec $i = 2$ à $n-1$

L'équation de conduction:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + S = 0 \iff k\frac{d^2T}{dx^2} + S = 0$$

Discrétisation de l'équation de conduction:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} \iff 2T_i = T_{i+1} + T_{i-1} + \frac{Sh^2}{k}$$

Conditions aux limites:

Noeud 1: q_1 : on ajoute un noeud 0 "effectif"

donc: $q_1 = -k\dfrac{dT}{dx} = -k\left(\dfrac{T_2 - T_0}{2h}\right)$

$\iff 2hq_1 = -kT_2 + kT_0 \iff T_0 = T_2 + \dfrac{2hq_1}{k}$

Noeud n: $T_5 = T_L$

L'ensemble obtenu

$$\begin{cases} 2T_1 = T_2 + T_0 + \dfrac{Sh^2}{k} = y \\ 2T_2 = T_3 + T_1 + y \\ 2T_3 = T_4 + T_2 + y \\ 2T_4 = T_5 + T_3 + y \\ T_5 = T_L \end{cases} \iff \begin{cases} T_1 = T_2 + 10.3 \\ 2T_2 = T_3 + T_1 + 6 \\ 2T_3 = T_4 + T_2 + 6 \\ 2T_4 = T_5 + T_3 + 6 \\ T_5 = 500 \end{cases}$$

GENIE DES PROCEDES fan page

L'algorithme de resolution par méthode TDMA

```
Début
 Réel ai, bi, ci, di, xi, Pi, qi, Ti, h
 Entrer n, L, i
 Lire (ai, bi, ci, di  i ← 1 à n)
 Lire n, L
 h ← L/(n-1)
 x(1) ← 0
 Pour i ← 2 à n faire
   x(i) ← x(1) + (i-1) * h
 fin pour
 P(1) ← b(1) / a(1)
 q(1) ← d(1) / a(1)
 pour i ← 2 à n faire
   P(i) ← b(i) / (a(i) - c(i) * P(i-1))
   q(i) ← (c(i) * q(i-1) + d(i)) / (a(i) - c(i) * P(i-1))
 fin pour
   T(n) ← q(n)
 pour i ← n-1 à 1 faire
   T(i) = P(i) * T(i+1) + q(i)
 fin pour
 Afficher (x(i), T(i), i ← 1 à n)
 fin
```

Le déroulement de l'algorithme

i	a	b	c	d	P	q	T
1	1	1	–	10,8	1	10,8	579,2
2	2	1	1	6	1	16,8	568,4
3	2	1	1	6	1	22,8	551,6
4	2	1	1	6	1	28,8	528,8
5	1	–	0	500	–	500	500

GENIE DES PROCEDES fan page

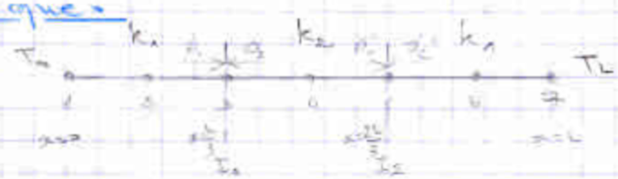
Exercice 2:

Données :

$$k = \begin{cases} k_1 = 1 & : 0 < x < \frac{L}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2L}{3} < x < L \\ k_2 = 3 & : \frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3} \end{cases}$$

$T_0 = 293$; $T_L = 373$; $S = 0$, $n = 7$, $L = 1.2 \Rightarrow h = \frac{L}{n-1} = 0.1$

Domaine physique :



à l'interface :

$\phi_1 + \phi_2 = 0$ avec : $\phi_1 = -k_1 \left(\frac{T_3 - T_2}{h}\right)$ et $\phi_2 = -k_2 \left(\frac{T_3 - T_4}{h}\right)$

$\phi_1' + \phi_2' = 0$ avec : $\phi_1' = -k_2 \left(\frac{T_5 - T_4}{h}\right)$ et $\phi_2' = -k_1 \left(\frac{T_5 - T_6}{h}\right)$

donc : $(k_1 + k_2) T_3 = k_1 T_2 + k_2 T_4$

$(k_1 + k_2) T_5 = k_2 T_4 + k_1 T_6$

Discrétisation de l'équation de conduction

$T_1 = T_0$	$T_1 = 293$
$2T_2 = T_3 + T_1$	$2T_2 = T_3 + T_1$
$(k_1 + k_2) T_3 = k_2 T_4 + k_1 T_2$	$\Leftrightarrow 4T_3 = 3T_4 + T_2$
$2T_4 = T_5 + T_3$	$2T_4 = T_5 + T_3$
$(k_1 + k_2) T_5 = k_1 T_6 + k_2 T_4$	$4T_5 = T_6 + 3T_4$
$2T_6 = T_7 + T_5$	$2T_6 = T_7 + T_5$
$T_7 = T_L$	$T_7 = 373$

GENIE DES PROCEDES fan page

Le programme de Thomas

```
c   Programme principal
    program EMD
    Real a(20), b(20), c(20), d(20), x(20), T(20), L, h
    Integer n, i
    Data n, L, To, TL / 7, 1.2, 293, 373/
    a(1) = 1
    b(1) = 0
    d(1) = To
    do i = 2, n-1, 2
    a(i) = 2
    b(i) = 1
    c(i) = 1
    End do
    do i = 3, n-1, 2
    Print*, 'a(', i, ')=', 'b(', i, ')=', 'c(', i, ')='
    Read*, a(i), b(i), c(i)
    End do
    a(n) = 1
    c(n) = 0
    d(n) = TL
c   Maillage uniforme
    h = L/(n-1)
    x(1) = 0
    x(n) = L
    do i = 2, n-1
    x(i) = x(1) + (i-1)*h
    End do
    Call TDMA (n, a, b, c, d, T)
c   Affichage
    do i = 1, n
    Print*, 'x(', i, ')=', x(i), 'T(', i, ')=', T(i), 'K'
    End do
```

End

c Sous programme de type soubroutine

```
Subroutine TDMA (n, a, b, c, d, T)
Real a(10), b(10), c(10), d(10), P(10), q(10), T(10), deno
Integer i, n
do i = 2, n
P(1) = b(1) / a(1)
q(1) = d(1) / a(1)
deno i = a(i) - c(i) * P(i-1)
P(i) = b(i) / deno(i)
q(i) = (c(i) * q(i-1) + d(i)) / deno(i)
End do
T(n) = q(n)
do i = n-1, 1, -1
T(i) = q(i) + P(i) * T(i+1)
End do
Return
End
```

Le deroulement de l'Algorithme.

i	a	b	c	d	P	q	T
1	1	0	–	293	0	293	293
2	2	1	1	0	0,5	146,5	310,14
3	4	3	1	0	0,857	41,85	327,23
4	2	1	1	0	0,87	36,6	333
5	4	1	3	0	0,73	79,91	338,71
6	2	1	1	0	0,78	62,78	355,85
7	1	–	0	373	0	373	373

GENIE DES PROCEDES fan page