/

Modélisation mathématique des phénomènes de transfert Série 2 2009-2010

Exercice 1 : Montrer que les équations de conservation sous leur forme générale s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \mathrm{div}(\rho\bar{u}\Phi) = \mathrm{div}(\Gamma\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Phi) + S$$

Exercice 2 : Donner la classification des équations suivantes :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - C^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = f(x,t), \quad y^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0, \quad x\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + 4\frac{\partial^2\Phi}{\partial y.\partial x} = 0$$

Exercice 3 : Pour les situations physiques indiquées ci-après, lesquelles peuvent être traités d'une manière elliptique et ou d'une manière parabolique.

Cas 1 : écoulement dans un canal plan

- Profils de vitesse et de température uniformes à l'entrée
- Les parois sont maintenues à une température constante

Cas 2 : Ecoulement dans une conduite cylindrique

- Profils de vitesse et de température uniformes à l'entrée
- La paroi latérale est maintenue à une température constante

Cas 3 : Ecoulement sur une plaque plane

- Profils de vitesse uniforme au bord d'attaque
- La paroi latérale est maintenue à une température constante

Exercice 4 : pour $y = \sin(\pi X/2)$ déterminer la dérivée première de y à $X = 0.5$ avec $\Delta X=0.1$ en utilisant :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}}{12\Delta x}$$

- Comparer la précision des résultats
- Refaire l'exercice en prenant $\Delta X=0.05$
- Quelles conclusions en tirez-vous ?

Exercice 5 : Reprendre la même fonction de l'exercice 1 en calculant la dérivée seconde au même point et avec le même pas.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}}{12\Delta x^2}$$

Exercice 6 : On considère une tige de longueur l= 20 mm ayant une conductivité thermique constante k=0.5W/m/K et une source de chaleur uniforme $S = 1000\ kW/m^3$. Les bouts de la tige se trouvent à la température constante de 100°C et 200°C respectivement.

Déterminer la distribution de la température dans la tige en utilisant la méthode des différences finies. Résoudre le système d'équations obtenu par l'algorithme TDMA. Comparer les résultats numériques avec la solution exacte. Prendre 5 nœuds. Tracer la courbe T(X).

Exo 1 : Modélisation Mathématique des ph de tr "Série 2"

La forme générale des équations de conservation.

- Montrer que les équations de conservation sous leur forme générale s'écrivent : $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + div(\rho\vec{U}\phi) = div(\Gamma \, \overrightarrow{grad}\, \phi) + S$

ϕ : variable indépendante.

Equations de Navier-Stockes : En coordonnées cartésiennes et en négligeant le mouvement z)

$$/x : \rho\left(\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$/y : \rho\left(\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}$$

En écriture vectorielle :
$$\begin{cases} \overrightarrow{grad}\, U = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \\ div\, \vec{U} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \end{cases}$$

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \rho\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{U}\, \overrightarrow{grad}\, U\right)$$

$$(*)\ \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}_{U_x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu \underbrace{\frac{\partial U}{\partial y}}_{U_y}\Big) = div\Big(\mu\, \underbrace{(U_x + U_y)}_{U}\Big) \Rightarrow U_x + U_y = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \overrightarrow{grad}\, U$$

$$(*) = div(\mu\, \overrightarrow{grad}\, U) \quad ; \quad -\frac{\partial P}{\partial x} = -\overrightarrow{grad}\, P$$

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{U}\, \overrightarrow{grad}\, U\right) = div(\mu\, \overrightarrow{grad}\, U) - \overrightarrow{grad}\, P$$

par rapport à ϕ on aura $\rho\frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho\vec{U}\, \overrightarrow{grad}\, \phi = div(\Gamma\, \overrightarrow{grad}\, \phi) + S$

avec : $\mu = \Gamma$ et $S = -grad\, P$

Pour montrer l'équivalence de : $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + div(\rho\vec{U}\phi) = \rho\frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho\vec{U}\, \overrightarrow{grad}\, \phi$ ... (1)

Pour $\phi = 1 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{U}) = 0$ équation de continuité.

On multiplie l'équation de continuité par ϕ on aura : $\phi\frac{\partial \rho}{\partial t} + \phi\, div(\rho\vec{U}) = 0$ ... (2)

$$(1)+(2) : \rho\frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho\vec{U}\, \overrightarrow{grad}\, \phi + \phi\, div(\rho\vec{U}) + \phi\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\underbrace{\rho\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t}\rho\phi} + \underbrace{\rho\vec{U}\, \overrightarrow{grad}\, \phi + \phi\, div(\rho\vec{U})}_{div(\rho\vec{U}\phi)}$$

donc on a montré que : $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \mathrm{div}(\rho\vec{U}\phi) = \mathrm{div}(\Gamma\,\mathrm{grad}\,\phi) + S$

En notat° tensorielle ou indicielle.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho U\phi)}_{\mathrm{II}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)}_{\mathrm{III}} + \underbrace{S}_{\mathrm{IV}}$$

I : terme Instationnaire temporel.

II : terme Convectif.

III : terme Diffusif.

IV : Terme Source.

Equation de continuité : $\phi = 1$, $\Gamma = S = 0$

Equat° de Π^{vt} : $\phi = U$; $\{U, V \text{ ou } V\}$; $\Gamma = \mu$; $S = \underbrace{F_v}_{\text{Force de volume}} + \underbrace{F_{VS}}_{\text{force de viscosité}} + \mathrm{grad}\,P$

Equat° de l'énergie : $\phi = T$, $\Gamma = \frac{\lambda}{c_p}$, $S = \frac{S_h}{c_p}$

Sh : générat° de chaleur / unité de volume.

- effet rayonnement.
- effet Joule.
- effet de dissipat°.

exp1 : $\underbrace{\vec{V}\Delta\vec{V}}_{T.C} = \underbrace{-\nabla P + \rho\vec{g} - [b + c|\vec{V}|]\,\vec{V}}_{T.S} + \underbrace{d\,\nabla^2\vec{V}}_{T.D}$

exp2 : f_x : $\underbrace{\rho\left[U\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} - \frac{V^2}{r}\right]}_{T.C} = \underbrace{F_r}_{S} - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial r}}_{S} + \underbrace{\mu\left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right]}_{T.D} + \underbrace{\mu\left[\frac{U}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right]}_{S}$

exp3 : f_y : $\underbrace{\rho\left[U\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{UV}{r}\right]}_{T.C} = \underbrace{F_y}_{S} - \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}}_{S} + \underbrace{\mu\left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right]}_{T.D} + \underbrace{\left[\frac{V}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right]}_{S}$

Classificat° des équat° EDP

Le classement des EDP écrites sous forme simple :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n)\,\phi + d(x_1 \dots x_n) = 0$$

Type Elliptique : si tous les $a_i \neq 0$ et de m̂ signe (positif)

" hyperbolique : si tous les $a_i \neq 0$ et à une except° près m̂ signe ($\exists \neq$ de signe)

" Parabolique : $\exists\, a_i = 0$ (au moins un) et tous les autres de m̂ signe.

EDP ordre 2, 2 variables x, y

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\phi}{\partial x} + E\frac{\partial\phi}{\partial y} + F\phi = G(x,y)$$

$\Delta = B - 4AC$: Si : $\Delta < 0$ => éq elliptique

$\Delta > 0$ => " hyperbolique

$\Delta = 0$ => " Parabolique.

Variables => simple et double influence

- Si on chauffe une plaque d'un coté

simple influence => Parabolique

- Si on chauffe à 2 cotés

Double influence

- Dans le cas d'un refroidissement :

à $t = 0$; $T = T_0$ et à $t = 5\,min$ $T = T_1$ avec : $T_1 < T_0$

Simple influence.

Rq : Coordonnée temporaire est tjrs simple influence.

Coordonnées Spaciales sont pratiquement tjrs à double influence, mais dans certains cas elles peuvent être à simple influence.

On peut dire que l'équat° est parabolique si la coordonnée temporaire est à simple effet.

Exo 2

- $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = f(x,t)$; $x_i = x_1$ ou x_2 / $x_1 = t$ et $x_2 = x$

$a_1 = 1$ et $a_2 = -c^2 < 0$ ⇝ Équat° hyperbollique

$\Delta = 0 - 4(1\times -c^2) = 4c^2 > 0$ => éq hyper

- $y^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_1 = y^2 > 0 \\ a_2 = -x^2 < 0 \end{cases} \rightarrow \text{type hyperbolique.}$$

GENIE DES PROCEDES fan page

* $x\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + 4\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = 0$ $\quad \Delta = 4^2 - 4(x(-y)) = 16 + 4xy$

$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \end{cases}$ donc : $16 + 4xy > 0 \rightsquigarrow$ hyperbolique

$16 + 4xy < 0 \rightsquigarrow$ elliptique

$16 + 4xy = 0 \rightsquigarrow$ parabolique

exp : $-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \rightarrow$ équat° parabolique (physiquement) car la coordonnée temporaire est à simple effet.

(x,y) $A=-1$, $B=0$, $C=-1$

$\Delta xy = -4 < 0 \Rightarrow$ elliptique

(x,t) $A=-1$, $B=0$, $C=0$; $\Delta_{x,t} = 0$

(y,t) $A=-1$, $B=0$, $C=0$, $\Delta_{y,t} = 0$

$\Big\} \Rightarrow$ parabolique.

Exo 4 :

* $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ pour : $x = 0,5$ avec : $\Delta x = 0,1$.

Solution exacte : $y' = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \Rightarrow y' = 1,1107$

- $\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} = \frac{\sin(3\pi/10) - \sin(\pi/5)}{0,2} = 1,1061$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} = \frac{\sin(3\pi/10) - \sin(\pi/4)}{0,1} = 1,0193$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}}{12\Delta x} = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12\Delta x}$

$= \frac{-\sin(7\pi/20) + 8\sin(3\pi/10) - 8\sin(\pi/5) + \sin(3\pi/20)}{12 \times 0,1} = 1,1107$

Calcul d'erreur : $\mathcal{E} = |S_{exacte} - S_{approchée}|$

- $\mathcal{E}_1 = |1,1107 - 1,1061| = 4,54 \cdot 10^{-3}$
- $\mathcal{E}_2 = |1,1107 - 1,0193| = 9,16 \cdot 10^{-2}$
- $\mathcal{E}_3 = |1,1107 - 1,1107| = 0$

$\Big\}$ $\mathcal{E}_3 < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$ donc le 3° terme est le plus exacte.

* avec : $\Delta x = 0,05$

Solution exacte : $y' = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1,1107$

- $\frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} = \frac{0,7806 - 0,6494}{0,1} = 1,1098$
- $\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} = \frac{0,7824 - 0,7071}{0,05} = 1,0660$
- $\frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12 \times 0,05} = \frac{-0,809 + 8 \times 0,7806 - 8 \times 0,6494 + 0,1577}{0,6} = 1,1103$

Les écarts

- $\varepsilon_1' = |1{,}1107 - 1{,}1896| = 7{,}9 \cdot 10^{-3}$
- $\varepsilon_2' = |1{,}1107 - 1{,}0660| = 4{,}5 \cdot 10^{-2}$
- $\varepsilon_3' = |1{,}1107 - 1{,}1103| = 10^{-4}$

$\varepsilon_3' < \varepsilon_2' < \varepsilon_1'$

* Comparaison entre les 2 cas

$\varepsilon_1' < \varepsilon_1$; $\varepsilon_2' < \varepsilon_2$; $\varepsilon_3' \simeq \varepsilon_3$ alors quand $h \downarrow$, écart $\downarrow$

Exo 5

- $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} = \dfrac{0{,}309 - 2 \times 0{,}7071 + 0{,}5877}{0{,}1^2} = -1{,}7411$
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}}{12\Delta x^2} = \dfrac{0{,}391 + 16 \times 0{,}309 - 30 \times 0{,}7071 + 16 \times 0{,}5877 - 0{,}454}{12 \times 0{,}1^2}$

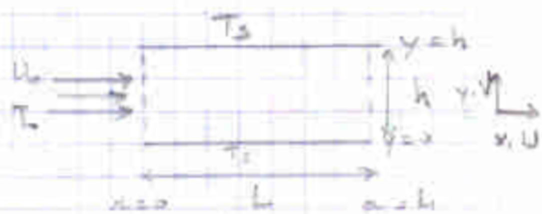
$= -1{,}7447$

Solution exacte : $y'' = -\dfrac{\pi^2}{4} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} x\right) = -\dfrac{\pi^2}{4} \sin\dfrac{\pi}{4} = -1{,}7447.$

- $\varepsilon_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_2 = 0$

Exo 3

Cas 1 : Ec t dans un canal plan.



- forme indicielle de la forme générale des équations de conservation.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + S$$

L assez long.

- $\boxed{\text{équat}^{\circ} \text{ de } M^{vt}}$: $\phi = U$; $\Gamma = \mu$; $S = -\text{grad}\, P$

→ Régime stationnaire : $\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) = 0$ $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \end{cases}$ $\begin{cases} U_1 = U \\ U_2 = V \end{cases}$

i : indice des variables dépendantes

j : " " indépendantes (direct°)

fluide incompressible ($\rho = $ cst)

Suivant x : $\underbrace{\rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y}}_{T.C} = \underbrace{\mu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)}_{T.D} \underbrace{-\frac{\partial P}{\partial x}}_{T.S}$

Suivant y : $\rho U \frac{\partial V}{\partial x} + \rho V \frac{\partial V}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) - \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right)}_{\frac{\partial P}{\partial y}}$

P : Pression Motrice.

Type d'équat° suivant x

Simple effet : $x = 0$; $U = U_0$: condit° d'entrée

Double effet : $\begin{cases} y = 0 \\ y = h \end{cases} \Rightarrow U = 0$: condit° d'adhérence (non glissement)

Le terme $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ << terme $\frac{\partial U}{\partial x}$: donc, diffusion axiale (suivant x) est négligeable.

$\Delta = B^2 - 4AC = 0 - 4 \times 0 \times \mu = 0 \Rightarrow$ éq parabolique.

. Si on considère qu'il y a établissement hydrodynamique à la sortie du canal.

Double effet : $\begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases}$; $U = U_0$; $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ (Régime établi à la sortie)

Double effet : $\begin{cases} y = 0 \\ y = h \end{cases}$; $U = 0$

donc. $\Delta = 0 - 4 \times \mu \cdot \mu = -4\mu^2 < 0 \Rightarrow$ éq elliptique

Type d'équation suivant y

Simple effet : $x = 0$. $V = 0$ condit° d'entrée

Double effet : $\begin{cases} y = 0 \\ y = h \end{cases} \Rightarrow V = 0$ condit° de non pénétrat° " Imperméable

terme $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ << terme $\frac{\partial V}{\partial x}$ $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ éq parabolique.

. Régime établi à la sortie du canal.

Double effet : $\begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases}$; $V = 0$ $\Rightarrow \Delta = -4\mu^2 < 0 \Rightarrow$ éq elliptique

Double effet : $\begin{cases} y = 0 \\ y = h \end{cases}$; $V = 0$

. $\boxed{\text{Eq d'énergie}}$: $\phi = T$; $\Gamma = \frac{\lambda}{c_p}$; $S = \frac{S_h}{c_p}$; $S_h = 0$: pas de génerat° de chaleur

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \quad / \lambda = c^{te}$$

Simple effet : $x = 0$; $T = T_0$ cond d'entrée

Double effet : $\begin{cases} y = 0 \\ y = h \end{cases} \Rightarrow T = T_s$

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} << \frac{\partial T}{\partial x}$; diffusion axiale de la chaleur est négligeable.

$\Delta = B^2 - 4AC = 0 - 4 \times 0 \times \lambda = 0 \Rightarrow$ éq parabolique

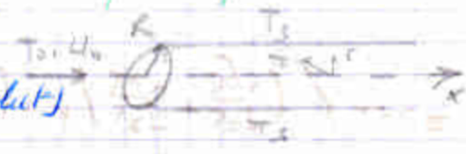
GENIE DES PROCEDES fan page

Si on considère que le canal est assez long donc il y a établissement thermique à la sortie.

Double effet : $\begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = T_0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \end{cases}$; $\Delta = -4\lambda^2 < 0$

Double effet : $\begin{cases} y = 0 \\ y = h \end{cases} \Rightarrow T = T_s$ → éq elliptique

Cas 2. Ect de conduite cylindrique



- On néglige suivant θ (Symétrie de révolut°)
- Ect stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

x : $\rho\left(U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial r}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$

y : $\rho\left(U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g\right) + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{V}{r^2}\right)$

Type d'équat° suivant x   Equat° de M^vt

Simple effet : $x = 0$; $U = U_0$

Double effet : $\begin{cases} r = 0 \\ r = R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \\ U = 0 \end{cases}$ (Symétrie) Non glissement, $T = T_s$

donc : $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} << \frac{\partial U}{\partial x}$; $\Delta = 0$ => Eq parabolique

Si on considère l'établissement à la sortie.

Double effet : $\begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = U_0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \end{cases}$ $\Delta = -4\mu^2 < 0$

Double effet : $\begin{cases} r = 0 \\ r = R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \\ U = 0 \end{cases}$ (Non glissement) => éq elliptiques

Equat° énergétique $\rho C_p\left(U\frac{\partial T}{\partial x} + V\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)$

suivant x :
double effet : $\begin{cases} x = 0 & V = 0 & T = T_0 \\ x = L & V = 0 & \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \end{cases}$ (cd. Régime établi)

suivant r :
double effet : $\begin{cases} r = 0 & V = 0 & \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ R = R & V = 0 & T = T_s \end{cases}$ (symétrie)

→ Les éq de M^vt et d'énergie sont elliptiques.

Rq : L'éq de continuité est tjs parabolique (∃ seult des dérivées 1^ère)

$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \xrightarrow{Pour} cas\ 1$

$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (Vr)}{\partial r} = 0 \longrightarrow cas\ 2$

Résolution d'un système d'équat° linéaires

Il ∃ 2 méthodes de résolution { Méthodes directes — TDMA ; Méthodes itératifs — Gauss Seidel

TDMA "Tridiagonal Matrice Algorithme"

Résolution d'un problème de TC conduit au système d'équation linéaire de la forme $a_i T_i = b_i T_{i+1} + C_i T_{i-1} + d$

La relation de récurrence est de la forme : $T_i = P_i T_{i+1} + q_i$

Algorithme de Thomas "TDMA"

- Lecture des coefficients $(a, b, c, d, i = 1, N)$
- calcul de P_1 et q_1

  $P_1 = b_1 / a_1$

  $q_1 = d_1 / a_1$
- Calcul de P_i et q_i pour $i = 2, N-1$

  $P_i = b_i / (a_i - C_i P_{i-1})$

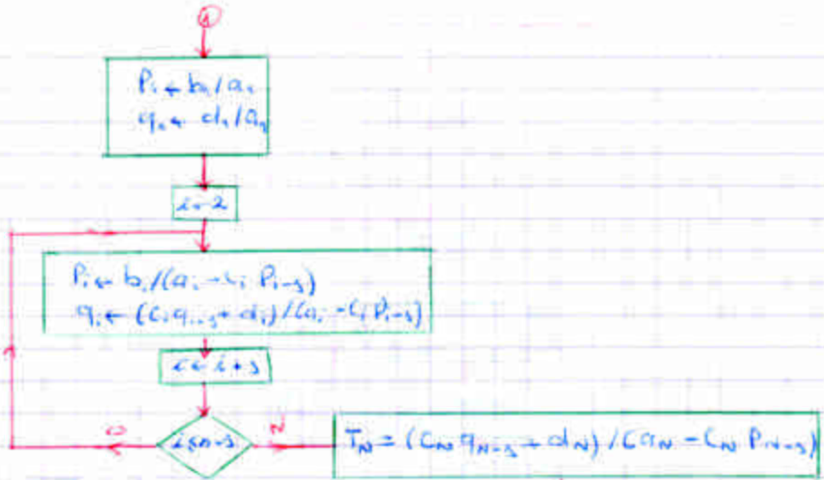
  $q_i = (C_i q_{i-1} + d_i) / (a_i - C_i P_{i-1})$
- Calcul de T_N

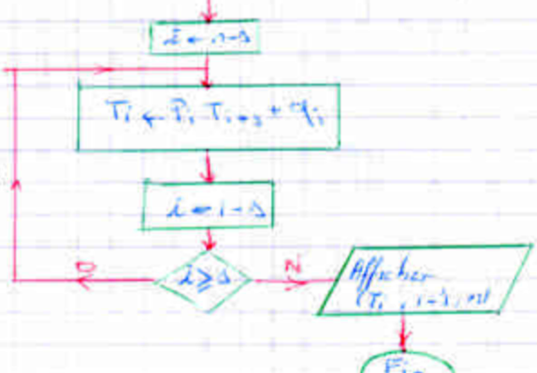
  $T_N = (C_N q_{N-1} + d_N) / (a_N - C_N P_{N-1})$

  $T_N = q_N$
- Calcul dans l'ordre $T_{N-1}, T_{N-2}, T_3, T_2, T_1$ par la formule :

  $T_i = P_i T_{i+1} + q_i \; (i = N-1, 1)$
- Affichage

Organigramme de TDMA





Exo 6

Données :

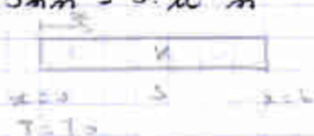
$K = 0{,}5\ W/m.K$; $\ell = 20\,mm = 2\cdot 10^{-2}\,m$

$S = 1000\ kW/m^3 = 10^6\ W/m^3$; $T_0 = 100°C = 373\ K$

$T_L = 200°C = 473\ K$; 5 noeuds $\Rightarrow n = 5$

Pas : $\Delta x = h = \dfrac{L}{(n-1)} = 5\,mm = 5\cdot 10^{-3}\,m$

domaine physique



Equation de conduction : $\dfrac{d}{dx}\left(K\dfrac{dT}{dx}\right) + S = 0$

$K = cst$; $S = cst$ $\rightsquigarrow$ $K\dfrac{d^2T}{dx^2} + S = 0$

Condit° aux limites :

$x = 0$ $\quad T = T_0$

$x = L$ $\quad T = T_L$

Maillage uniforme (même Pas)

$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + \Delta x \\ \text{ou} \\ x_i = x_1 + (i-1)\Delta x \end{cases}$

Discrétisat° de l'éq de conduction par la méthode des ≠ finies

utilisation du schéma centré.

Noeud 1 : $\quad T_1 = T_0 \quad (C.L)$

Noeud i : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big|_i = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + \underbrace{O(\Delta x^2)}_{\varepsilon}$ → négligeable

$$= \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$K\left(\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}\right) + S = 0 \iff T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} + \frac{S\Delta x^2}{K} = 0$

Pour $i = 2,4$

Le système d'équation linéaire obtenu est :

$$\begin{cases} T_3 - 2T_2 + T_1 + 50 = 0 \\ T_4 - 2T_3 + T_2 + 50 = 0 \\ T_5 + 2T_4 + T_3 + 50 = 0 \end{cases}$$

T_2, T_3, T_4 : Inconnues.

Les équations discrétisées peuvent se mettre sous la forme :

$a_i T_i = b_i T_{i+1} + C_i T_{i-1} + d_i \qquad i = 2,4$

avec : $a_i = 2$, $b_i = C_i = 1$; $d_i = 50$; $i = 2,4$

Noeud 5 : $T_5 = T_L$ (C.L)

Solution exacte : $\frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right) + S = 0 \iff \int\left(\frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right) + S\right)dx = 0$

$K\frac{dT}{dx} + Sx + C_1 = 0 \iff K\frac{dT}{dx} = -Sx - C_1$

$\int K\,dT = \int(-Sx - C_1)\,dx \iff KT = -\frac{S}{2}x^2 - C_1 x + C_2$

donc $T(x) = -\frac{S}{2K}x^2 - \frac{C_1}{K}x + \frac{C_2}{K}$: profil parabolique ; C_1 et C_2 à déterminer.

C.L : $x = 0$; $T = T_0 = \frac{C_2}{K}$ → $C_2 = KT_0$

$x = L$; $T = T_L$ → $T_L = -\frac{S}{2K}L^2 - \frac{C_1 L}{K} + T_0$ → $C_1 = (T_0 - T_L)\frac{K}{L} - \frac{S}{2}L$

$$\boxed{T(x) = -\frac{S}{2K}x^2 + \left(\frac{T_L - T_0}{L} + \frac{SL}{2K}\right)x + T_0}$$

A.N : $T(x) = -10^6 x^2 + 25\,10^3 x + 373$

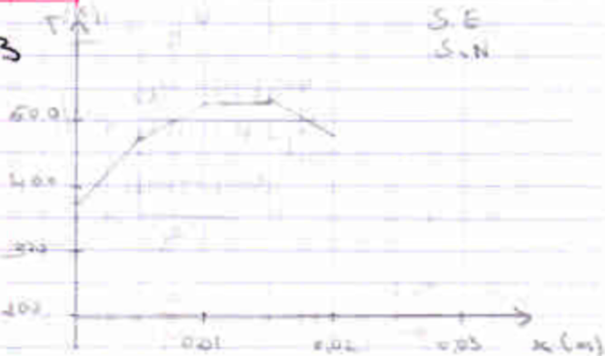
$x = 0$ m $\quad T(x) = 373$ K

$x = 5.10^{-3}$ m $\quad T(x) = 473$ K

$x = 10\,10^{-3}$ m $\quad T(x) = 523$ K

$x = 15.10^{-3}$ m $\quad T(x) = 523$ K

$x = 20\,10^{-3}$ m $\quad T(x) = 473$ K



Le déroulement de l'Algorithme

i	a	b	c	d	p	q	T(K)
1	1	0	–	373	0	373	373
2	2	1	1	50	0,5	211,5	473
3	2	1	1	50	0,67	174,33	523
4	2	1	1	50	0,75	168,25	523
5	1	–	0	473	–	473	473

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad ; \quad q_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}$$

$$q_i = \frac{c_i q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i P_{i-1}}$$

$$T_n = q_n$$

Programme de TDMA

Résolution par méthode itérative "Gauss Seidel"

La forme générale des équations discrétisées . $-c_i T_{i-1} + a_i T_i - b_i T_{i+1} = d_i$

$\Rightarrow a_i T_i = d_i + c_i T_{i-1} + b_i T_{i+1}$ Pour $i = 2, 4$

$\Rightarrow T_i = (d_i + c_i T_{i-1} + b_i T_{i+1}) / a_i$ $i = 2, n-1$

$T_1 = (d_1 + b_1 T_2) / a_2$ et $T_n = (d_n + c_n T_{n-1}) / a_n$

La méthode de Gauss Seidel ne converge pas toujours pour garantir la convergence il suffit de satisfaire le critère de scarborough.

$$\frac{\Sigma |a_{np}|}{|a_p|} \begin{cases} \leq 1 & \text{Pour tts les équat}^{\circ}. \\ < 1 & \text{pour au moins une équat}^{\circ}. \end{cases}$$

a_{np} : coeff voisins au noeud principal (c_i et b_i)

a_p : coeff du noeud principal (a_i)

L'Algorithme de la méthode G.S

```
Début
lire (n, eps, kmax)
lire (ai, bi, ci, di, i = 1, n)
T(1) ← To
Tn ← Te
Pour i ← 2 à n-1 faire          } Lire (T(i), i = 1, n)
   T(i) ← d(i) / a(i)
Fin pour
k ← 1
ecart ← 1 + eps
Tant que (ecart > eps et k < kmax) faire
   ecart ← 0
   Pour i ← 2 à n-1 faire
      S ← b(i) * T(i+1) + C(i) * T(i-1)
      Tp ← (d(i) + S) / a(i)
      Si (Tp = 0) alors
         r ← abs(T(i) - Tp)
      Sinon
         r ← abs((T(i) - Tp) / Tp)
      Fin si
      ecart ← max(r, ecart)
      T(i) ← Tp
   Fin pour
   k ← k+1
Fin tant que
Fin
```

GENIE DES PROCEDES fan page

Le déroulement de l'Algorithme de la méthode G.S

- Lecture des coeff $(n, a, b, c, d, i=1)$
- choix initial : $(k=0)$ $T^{(0)} = \begin{pmatrix} T_0 \\ d_2/a_2 \\ d_3/a_3 \\ d_4/a_4 \\ T_p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 373 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ 473 \end{pmatrix}$

$1^{ère}$ itération $(k=1)$

$i=2$: $S = b_2 T_3^{(0)} + C_2 T_1 = 25 + 373 = 398$

$T_p = (d_2 + S)/a_2 = (50 + 398)/2 = 224$

$r = (|T_p - T_2| / T_p) = 0{,}384$

$ecart = max(r, ecart) = max(0{,}384, 0) = 0{,}884$

$T_2^{(1)} = T_p = 224$

$i=3$: $S = b_3 T_4^{(0)} + C_3 T_2^{(1)} = 25 + 224 = 249$

$T_p = 149{,}5$

$ecart = 0{,}3328$

$T_3^{(1)} = T_p$

$i=4$: $S = 622{,}5$

$T_p = 336{,}25$

$ecart = 0{,}9257$

$T_4^{(1)} = T_p$

$k=1$

$ecart = max = 0{,}9257$ $\sim$ $T^{(1)} = \begin{pmatrix} 373 \\ 224 \\ 149{,}5 \\ 336{,}25 \\ 473 \end{pmatrix}$

Arrêt du processus itératif si

$k > kmax$ ou $ecart < eps$

GENIE DES PROCEDES fan page

Program Exo6 Serie 2

```
Dimension a(10), b(10), c(10), d(10), x(10), T(10)
Real h, k, l, s
open (unit = 3, file = 'Reslt.dat', status = 'unknown')
Data l, k, s, To, Tl /0.02, 0.5, 1e6, 373, 473/
Print*, 'n = '
Read*, n
h = l/(n-1.)
s = s*h**2/K
a(1) = 1
b(1) = 0
d(1) = To
a(n) = 1
c(n) = 0
d(n) = TL
Do i = 2, n-1
  a(i) = 2
  b(i) = 1
  c(i) = 1
  d(i) = s
enddo
Do i = 1, n
  Print*, 'a(', i, ')=', a(i)
enddo
x(1) = 0
x(n) = l
Do i = 2, n-1
  x(i) = x(1) + (i-1)*h
```

- 4 bis -

```
      Call Thomas (n, a, b, c, d, T)
      DO I = 1, n
        Print*, ' x(', i, ')= ', x(i), '   T(', i, ')= ', T(i)
        write (3, 10) x(i), T(i)
10      Format (2x, F6.3, 6x, F5.1)
      enddo
      end
      sous-Programme Type Subroutine
      subroutine Thomas (n, a, b, c, d, T)
      Dimension a(10), b(10), c(10), d(10), P(10), q(10), T(10)
      Real deno
      P(1) = b(1) / a(1)
      q(1) = d(1) / a(1)
      T(1) = q(1)
      Do 100 i = 2, n-1
         deno = a(i) - c(i) * P(i-1)
         P(i) = b(i) / deno
         q(i) = c(i) * q(i-1) + d(i)
         q(i) = q(i) / deno
100   Continue
      q(n) = c(n) * q(n-1) + d(n)
      q(n) = q(n) / (a(n) - c(n) * P(n-1))
      T(n) = q(n)
      DO 200 I = n-1, 2, -1
200      T(i) = P(i) * T(i+1) + q(i)
      Return
      end
```

GENIE DES PROCEDES fan page

```
rogram Seidel
Parameter (n=5)
Dimension a(n), b(n), c(n), d(n), T(n), X(n)
Real l,h
Data (a(i), i=1,n) / 1,2,2,2,1 /
Data (b(i), i=1,n-1) / 0,+1,+1,+1 /
Data (c(i), i=2,n) / +1,+1,+1,0 /
Data (d(i), i=1,n) / 373,50,50,50,473/
T(1) = 373 <---------- (1)
T(n) = 473
 Do i = 2,n-1
   T(i) = d(i)/a(i)
 ENDDO
 Call Gauss seidel (n,a,b,c,d,T,ecart,k)
 Do i = 1,n
   Print*, 'T(',i,')=', T(i), '     X(',i,')=', X(i)
 enddo
 Print*, 'Ecart=', Ecart, '   k=', k
 END
 Subroutine Gauss Seidel (n,a,b,c,d,T, ecart,k)
 Dimension a(n), b(n), c(n), d(n), T(n)
  Real eps, Tp, S, ecart
  Print*, 'eps=', '   kmax='
  read* eps, kmax
  K=1
  Ecart= eps+1
  Dowhile (ecart.gt.eps.and.k.le.kmax)
     Ecart= 0
     Do i= 2,n-1
```