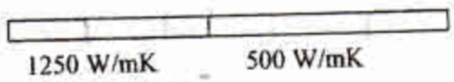
Génie des Procédés **Modélisation des Phénomènes de Transfert** **Série d'exercices n°3**

Exercice 1 : On considère une barre cylindrique dont les extrémités A et B sont maintenues respectivement à 50°C et 375°C. Sa conductivité thermique est égale à 1250 W/mK et sa longueur est égale à 0.5 m. Déterminer la distribution de la température le long de la barre en considérant :

- Un maillage uniforme à six nœuds

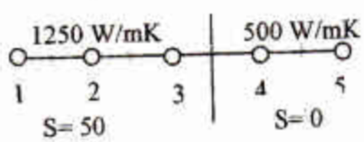
Comparer les résultats obtenues avec la solution analytique.

Exercice 2 : Si la barre de l'exercice précédent est composée de deux matériaux différents de longueur identiques et égales à 0.25 m comme cela est illustré sur la figure suivante :



Déterminer la distribution de la température en utilisant 06 nœuds.

Exercice 3: Soit une barre composée de deux matériaux différents de longueurs respectives égales à 2.5 m et 1.5 m comme cela est illustré sur la figure suivante :



1- déterminer les équations donnant la répartition des températures en utilisant un maillage uniforme $\Delta X= 1$
2- rédiger le programme pour la résolution avec la méthode TDMA.
3- rédiger l'organigramme correspondant

Exercice 4 : Soit On considère une tige de longueur L = 1 m ayant une conductivité thermique constante k et une source de chaleur uniforme q. Les bouts de la tige sont à des températures constantes T_o et T_L.
L'équation régissant le phénomène est :

$$k\frac{d^2T}{dX^2}+q=0$$

- En utilisant la méthode des différences finies avec un schéma centré, donner les équations pour déterminer la distribution de la température avec un pas h = 0.5 m (2 pts).
- En déduire l'algorithme et le programme pour h = 0.05 m (6pts)

On veut résoudre le même problème avec la méthode de Gauss-seidel sans relaxation.

- donner les équations pour déterminer la distribution de la température avec un pas h = 0.5 m (2pts).
- En déduire l'organigramme et le programme pour h = 0.05 m (10 pts)

Exercice 5: On considère un problème de conduction 1D en régime permanent avec S=2 et K=1. On prend 4 nœuds aux positions X=0 , 1 , 2 et 3 sur un domaine de longueur 3 unités. Ecrire l'équation discrétisée pour chaque nœud, les conditions aux limites étant :
A X = 0 q_0 = 5 flux entrant dans le domaine
A X = 3 q_3 = 5 flux sortant du domaine.
Résoudre le système d'équations ainsi obtenu en utilisant :

Programme de TP (avec série 3)

```
c     Programme principal
      Program exo1
      Real a(10), b(10), c(10), d(10), t(10), L, x(10)
      Integer i, n
      Print*,'n='
      Read*, n
      do i=1,n
        Print*,'a(',i,')=',' b(',i,')=',' c(',i,')=',' d(',i,')='
        Read*, a(i), b(i), c(i), d(i)
      End do
c     Maillage
      L=0.5
      h=L/(n-1)
      x(1)=0
      x(n)=0.5
      do i=2,n-1
        x(i)=x(1)+(i-1)*h
      End do
      Call TDMA(n,a,b,c,d,t)
      do i=1,n
        Print*,'x(',i,')=',x(i),'  t(',i,')=',t(i)
      End do
      End
c     Sous programme de type subroutine
      Subroutine TDMA(n,a,b,c,d,t)
      Real a(10), b(10), c(10), d(10), P(10), q(10), t(10)
      Integer i, n
      do i=2,n-1
        P(1)=d(1)/a(1)
        q(1)=b(1)/a(1)
        P(i)=b(i)/(a(i)-c(i)*P(i-1))
        q(i)=(c(i)*q(i-1)+d(i))/(a(i)-c(i)*P(i-1))
      End do
```

GENIE DES PROCEDES fan page

```
t(1) = 323
t(n) = 634
t(n) - g(n)
do i = n-1, 2, -1
   t(i) = g(i) + P(i) + t(i+1)
End do
Return
End
```

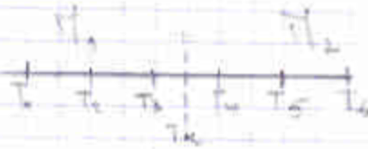
L'exécution :

a(1) = 1	b(1) = 0	c(1) = 0	d(1) = 323
a(2) = 2	b(2) = 1	c(2) = 1	d(2) = 0
a(3) = 2	b(3) = 1	c(3) = 1	d(3) = 0
a(4) = 2	b(4) = 1	c(4) = 1	d(4) = 0
a(5) = 2	b(5) = 1	c(5) = 1	d(5) = 0
a(6) = 1	b(6) = 0	c(6) = 0	d(6) = 634

x(1) = 0	t(1) = 323
x(2) = 0.1	t(2) = 388
x(3) = 0.2	t(3) = 453
x(4) = 0.3	t(4) = 518
x(5) = 0.4	t(5) = 583
x(6) = 0.5	t(6) = 643

Exo 2

$$k \frac{d^2T}{dx^2} + S = 0$$



Matériau 1 :

$$k_1 \frac{d^2T}{dx^2} + S_1 = 0$$

$T_1 = 323\ K$

$2T_2 = T_3 + T_1 + \frac{S_1 h^2}{k_1} \rightarrow y_1$

$2T_3 = T_\alpha + T_2 + \frac{S_1 h^2}{k_1}$

$T_\alpha = \alpha$

Matériau 2 :

$$k_2 \frac{d^2T}{dx^2} + S_2 = 0$$

$T_\alpha = \alpha$

$2T_4 = T_5 + T_\alpha + \frac{S_2 h^2}{k_2} \rightarrow y_2$

$2T_5 = T_6 + T_4 + \frac{S_2 h^2}{k_2}$

$T_6 = 648\ K$

à l'interface : $\phi_1 = -\phi_2$

$\phi_1 = -k_1 \left(\frac{T_\alpha - T_3}{h}\right)$; $\phi_2 = -k_2 \left(\frac{T_\alpha - T_4}{h}\right)$

$$T_\alpha \frac{(k_1 + k_2)}{h} = \frac{k_1}{h} T_3 + \frac{k_2}{h} T_4$$

GENIE DES PROCEDES fan page

Exo 3

1/ Données

$L_A = 2{,}5\,m$; $L_B = 1{,}5\,m$; $L = L_A + L_B = 4\,m$; $\frac{L_A}{L_B} = 5/3$

$\Delta x = h = 0{,}5\,m$; $T_A = 50°c = 323\,K$; $T_B = 375°c = 648\,K$

$S_A = 50\,w/m^2$; $S_B = 10\,w/m^2$

2/ Domaine physique

3/ Equation de conduction

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right) + S = 0$$

Equation de conduction du Matériau A : $K_A \frac{d^2T}{dx^2} + S_A = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{-S_A}{K_A}$

Equation de conduction du Matériau B : $K_B \frac{d^2T}{dx^2} + S_B = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{-S_B}{K_B}$

4/ Conductions aux limites

(Condition de DIRICHLET)

$x = 0 \quad T = T_A$; $x = L \quad T = T_B$

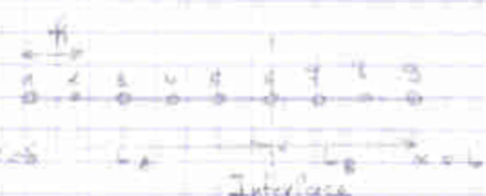
5/ Maillage uniforme

Nombre de noeuds : $n = \frac{L}{h} + 1 = \frac{4}{0{,}5} + 1 = 9$

$x_1 = 0$; $x_n = L$

$x_i = x_1 + (i-1)\,h$ pour $i = 2, n-1$

ou $x_i = x_{i-1} + h$



6/ Discrétisation : Méthodes des différences finies (schéma centré)

Matériau A :

Noeuds 1 (frontière A) $\quad T_1 = T_A \quad$ (C.L)

Noeud i : $i = 2, 5$ (noeuds internes) $\quad \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + \frac{S_A}{K_A} = 0$

$\Rightarrow 2T_i = T_{i+1} + T_{i-1} + \frac{S_A h^2}{k_A}$

Matériau B :

Noeud i : (internes) $\quad 2T_i = T_{i+1} + T_{i-1} + \frac{S_B h^2}{k_B}$

Noeud n. (frontière B) $T_n = T_B$ (C.L)

Interface : (Noeud 6) $\phi_A = -\phi_B \Rightarrow \phi_A + \phi_B = 0$

$\phi_A = -k_A \frac{dT}{dx}$; $\phi_B = -k_B \frac{dT}{dx}$

$= -k_A \frac{(T_6 - T_5)}{h}$ $= -k_B \frac{(T_6 - T_7)}{h}$

donc $-k_A \frac{(T_6 - T_5)}{h} - k_B \frac{(T_6 - T_7)}{h} = 0 \Leftrightarrow k_A(T_6 - T_5) + k_B(T_6 - T_7) = 0$

donc : $(k_A + k_B) T_6 = k_B T_7 + k_A T_5$

7/ Le système obtenu

$T_1 = 0 \cdot T_2 + T_A$

$2T_2 = T_3 + T_1 + y_A$

$2T_3 = T_4 + T_2 + y_A$ $\quad / \; y_A = \frac{S_A h^2}{k_A}$

$2T_4 = T_5 + T_3 + y_A$

$2T_5 = T_6 + T_4 + y_A$

$(k_A + k_B) T_6 = k_B T_7 + k_A T_5$

$2T_7 = T_8 + T_6 + y_B$

$2T_8 = T_9 + T_7 + y_B$ $\quad / \; y_B = \frac{S_B h^2}{k_B}$

$T_9 = 0 \cdot T_8 + T_B$

8/ Les coefficients

$a_1 = 1$, $b_1 = 0$; $d_1 = T_A$

$a_i = 2$; $b_i = 1$; $c_i = 1$, $d_i = y_A$ $\quad i = 2,5$

$a_6 = k_A + k_B$; $b_6 = k_B$; $c_6 = k_A$, $d_6 = 0$

$a_i = 2$; $b_i = 1$; $c_i = 1$; $d_i = y_B$ $\quad i = 7, n-1$

$a_n = 1$; $c_n = 0$, $d_n = T_B$

9/ Resolution du système d'équation découlant peut s'effectuer par méthode directe, TDMA et méthode iterative (Gauss Seidel)

10/ Les étapes :

Programme principale

Declaration

Entrées coeff par lecture ou affectation

Maillage
Appel de subroutine
Affichage de X(i) et T(i)
Fin

Subroutine Nom(entrées, sorties)
Déclaration
Opération de calcul
Retour
Fin
Entrées : nbre de noeuds et coefficients
Sorties : dist T, ecart, k (G.S)

11/ L'execution

TDMA

$X_1 = 0.00$	$T_1 = 323.00$
$X_2 = 0.50$	$T_2 = 349.03$
$X_3 = 1.00$	$T_3 = 375.06$
$X_4 = 1.50$	$T_4 = 401.07$
$X_5 = 2.00$	$T_5 = 427.07$
$X_6 = 2.50$	$T_6 = 453.07$
$X_7 = 3.00$	$T_7 = 518.05$
$X_8 = 3.50$	$T_8 = 583.03$
$X_9 = 4.00$	$T_9 = 648.00$

Gauss Seidel

eps = 1e-07 kmax = 200

ecart = $3.1368 \cdot 10^{-7}$ k = 100

donc on utilise Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc : $0 \cdot T_4 = 0$

il y a une infinité de solut°

```
Programme du TP
Program TP3
Dimension a(10), b(10), c(10), d(10), x(10), T(10)
Real h, l
open(unit=1, file='Restp.dat', status='unknown')
Data l, To, Tl / 0.5, 323, 648 /
Print*, 'n='
Read*, n
h = l/(n-1.)
a(1) = 1
b(1) = 0
d(1) = To
a(n) = 1
c(n) = 0
d(n) = Tl
Do i = 2, n-1
  a(i) = 2
  b(i) = 1
  c(i) = 1
  d(i) = 0
enddo
x(1) = 0
x(n) = l
Do i = 2, n-1
   x(i) = x(1) +(i-1)*h
enddo
Call TDMA (n, a, b, c, d, T)
Do i = 1, n
  Print*, ' x(', i, ')=', x(i), '    T(', i, ')=', T(i)
  write (1, 11) x(i), T(i)
11 Format (2x, F3.1, 6x, F5.1)
```

Sous-programme de type subroutine

```
Subroutine TDMA (n, A, b, c, d, T)
Dimension a(10), b(10), c(10), d(10), P(10), q(10)
 Real Deno
 P(1) = b(1) / a(1)
 q(1) = d(1) / a(1)
 Do i = 2, n-1
   Deno = a(i) - c(i) * P(i-1)
   P(i) = b(i) / deno
   q(i) = c(i) * q(i-1) + d(i)
   q(i) = q(i) / deno
 enddo
 q(n) = c(n) * q(n-1) + d(n)
 q(n) = q(n) / (a(n) - c(n) * P(n-1))
 T(n) = q(n)
 Do i = n-1, 1, -1
    T(i) = P(i) * T(i+1) + q(i)
 enddo
 Return
 end
```

Programme principal de Resolution par TDMA

Program exo3 Serie 3

```
Dimension a(10), b(10), C(10), d(10), X(10), T(10)
Real h, l, ka, kb, S, Sa, Sb, Ta, Tb
open (unit=2, File='resulta.dat', status='unknown')
Data l, Ta, Tb, ka, kb, Sa, Sb /4, 323, 648, 1250, 500, 50, 10/
Print*, 'n='
Read*, n
h = l/(n-1.)
a(1) = 1
b(1) = 0
d(1) = Ta
a(n) = 1
c(n) = 0
d(n) = Tb
Do i = 2, n-1
   a(i) = 2
   b(i) = 1
   c(i) = 1
   If (i.le.5) then
      s = Sa + h**2/ka
      d(i) = s
   else if (i.Ge.7) then
      s = Sb* h**2/kb
      d(i) = s
   else
      a(6) = ka + kb
      b(6) = kb
      c(6) = ka
   endif
enddo
Do i = 1, n
 Print*, 'a(', i, ')=', a(i), '   b(', i, ')=', b(i)
 Print*, 'c(', i, ')=', c(i), '   d(', i, ')=', d(i)
```

```
DO I = 2, n
  x(i) = x(1) + (i-1) * h1
End Do
Call Thomas (n, a, b, c, d, T)
Do i = 1, n
  Print*, ' x(', i, ')= ', x(i), '     T(', i, ')= ', T(i)
write (2, 10) x(i), T(i)
10 Format (2x, F5.2, 6x, F6.2)
enddo
end
Sous Programme de type subroutine de TDMA
Subroutine Thomas (n, a, b, c, d, T)
Dimension a(10), b(10), c(10), d(10), P(10), q(10), T(10)
Real Deno
P(1) = b(1) / a(1)
q(1) = d(1) / a(1)
Do i = 2, n-1
  Deno = a(i) - c(i) * P(i-1)
  P(i) = b(i) / deno
  q(i) = C(i) * q(i-1) + d(i)
  q(i) = q(i) / deno
enddo
q(n) = C(n) * q(n-1) + d(n)
q(n) = q(n) / (a(n) - c(n) * P(n-1))
T(n) = q(n)
DO i = n-1, 1, -1
  T(i) = P(i) * T(i+1) + q(i)
enddo
Return
end
```

Programme Principal de Resolution par Gauss Seidel

```
Program Exo3 Serie 3
Parameter (n=9)
Dimension a(n), b(n), c(n), d(n), T(n), X(n)
Real l, h, ka, kb, Ta, Tb, Sa, Sb, ecart
open (unit = 3, file = 'resta.dat', status = 'unknown')
Data l, Ta, Tb, ka, kb, Sa, Sb /4, 323, 648, 1250, 500, 50, 10/
h = l/(n-1.)
a(1) = 1
b(1) = 0
d(1) = Ta
a(n) = 1
b(n) = 0
d(n) = Tb
Do i = 2, n-1
  a(i) = 2
  b(i) = 1
  c(i) = 1
  If (i.le.5) then
    d(i) = Sa * h**2/ka
  else if (i.Ge.7) then
    d(i) = Sb * h**2/kb
  else
    a(6) = ka + kb
    b(6) = kb
    c(6) = ka
  endif
enddo
X(1) = 0
Do i = 2, n
  X(i) = X(1) + (i-1)*h
enddo
T(1) = Ta
     = Tb
     i = 2, n-1
```

```
   T(i) = d(i) / a(i)
enddo
Call Gauss Seidel (n, a, b, c, d, T, ecart, k)
Do i = 1, n
   Print*, 'x(', i, ')=', x(i), '    T(', i, ')=', T(i)
   write (3, 10) x(i), T(i)
10 Format (2x, F5.2, 6x, F6.2)
enddo
Print*, 'ecart=', ecart, '   k=', k
end
Subroutine Gauss Seidel (n, a, b, c, d, T, ecart, k)
Dimension a(n), b(n), c(n), d(n), T(n)
Real eps, Tp, s, ecart
Print*, 'eps=', '   kmax='
Read*, eps, kmax
k=1
ecart = 1 + eps
Dowhile (ecart .GT. eps .and. k .le. kmax)
   Ecart = 0
   Do i = 2, n-1
      s = b(i) * T(i+1) + c(i) * T(i-1)
      Tp = (d(i) + s) / a(i)
      If (Tp . eq. 0) then
         r = abs (T(i) - Tp)
      else
         r = abs ((T(i) - Tp) / Tp)
      endif
      Ecart = max (r, ecart)
      T(i) = Tp
   enddo
   k = k + 1
enddo
Return
end
```