Janvier 2008

EMD TEC 751

EXERCICE 1 (2 points)

Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s), leur nature et la (les) valeur(s) de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

EXERCICE 2 (3points)

Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s), leur nature et la (les) valeur(s) de la fonction suivante, en utilisant la méthode de substitution.

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$$

Soumise à la contrainte suivante : $g(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 - x_2^2 - 1 = 0$

EXERCICE 3 (3 points)

Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s), leur nature et la (les) valeur(s) de la fonction suivante, en utilisant la méthode de Lagrange.

$$f(x_1, x_2) = 30 - 8(x_1 - 5)^2 - 4(x_2 - 5)^2$$

Soumise à la contrainte suivante : $g(x_1, x_2) = 2 - x_1 + x_2 = 0$

EXERCICE 4 (3 points)

Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s), leur nature et la (les) valeur(s) de la fonction suivante, en utilisant la méthode des dérivées contraintes.

$$f(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 + 3x_1^2 - x_1 x_2^2$$

Soumise à la contrainte suivante : $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1 = 0$

39

EXERCICE 5 (3 points)

Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s), leur nature et la (les) valeur(s) de la fonction suivante, en utilisant la méthode de Jacobi.

$$f(x_1, x_2) = x_1(-2 + 3x_1) + x_2(1 - x_1 x_2)$$

Soumise à la contrainte suivante : $-x_1 = x_2 + 1$

EXERCICE 6 (4 points)

Si la contrainte est inactive, existe-t-il des points critiques pour la fonction suivante :

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 + x_1 . x_2$$

Soumise à la contrainte suivante : $g(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$

N.B : La méthode de Lagrange doit être utilisée.

EXERCICE 7 (2 points)

Un fil de longueur L est coupé en trois. On fabrique un cercle, un carré et un rectangle. On cherche à maximiser la surface de ces trois motifs géométriques. Pour le rectangle, la longueur est le triple de la largeur.

Déterminez où il faut couper le fil, en donnant d'abord la fonction objective et le(s) contrainte(s).

Pcercle-les carré : Pcercle = Prectangle

Correction

Ex 1

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow f' = \frac{-2x^2 + (1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

$\Rightarrow x = \pm 1$ — 1 pt

$$f'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$f''(-1) > 0 \Rightarrow \min$; $f''(1) < 0 \Rightarrow \max$ — 0,5

$f(-1) = -1/2$ $\qquad f(1) = 1/2$ — 0,5

Ex 2

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$$

$$g(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 - x_2^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

$g \Rightarrow x_2^2 = (x_1 - 1)^2 - 1$ ds $f \Rightarrow f = x_1 + (x_1 - 1)^2 - 1$

$f' = 1 + 2(x_1 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1/2 \Rightarrow x_2^2 = -3/4$ impossible (1) (1)

Ex 3

$$f = 30 - 8(x_1 - 5)^2 - 4(x_2 - 5)^2$$

$$g = 2 - x_1 + x_2 = 0$$

$$\phi = f + \lambda g = 30 - 8(x_1-5)^2 - 4(x_2-5)^2 + \lambda(2 - x_1 + x_2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = -16(x_1 - 5) - \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -8(x_2 - 5) + \lambda = 0 \quad (2) \qquad 0,75$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 2 - x_1 + x_2 = 0 \quad (3)$$

$(3) \Rightarrow x_1 = x_2 + 2$ ds (1) $-16(x_2 + 2 - 5) - \lambda = 0 \quad (4)$

$-8(x_2 - 5) + \lambda = 0 \quad (2)$

$(4) + (2) \Rightarrow -24x_2 + 88 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{11}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{17}{3}$ (1)

C.S : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -16$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -8$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$

$$\begin{vmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 < 0 \qquad \Delta_2 > 0 \qquad (1)$$

on ne peut rien dire ... $f\left(\frac{17}{3}, \frac{11}{3}\right)$ 0,25

Ex4

$$dg = dx_1 + dx_2 \Rightarrow \frac{dg}{dx_2} = \frac{dx_1}{dx_2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dx_1}{dx_2} = -1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2 + 6x_1 - x_2^2 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 - 2x_1x_2$$

$$\frac{df}{dx_2} = -(-2 + 6x_1 - x_2^2) + (1 - 2x_1x_2) = 0$$

$$= 2 - 6x_1 + x_2^2 + 1 - 2x_1x_2 = 0$$

on a : $x_1 = -(x_2+1)$ (1)

$$3 + 6(x_2+1) + x_2^2 + 2x_2(x_2+1) = 0$$

$$9 + 8x_2 + 3x_2^2 = 0 \qquad b^2 - 4ac = 64 - 4.3.9 < 0$$

pas de solution. (1)

Ex5 Jacobi

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2 + 6x_1 - x_2^2 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 - 2x_1x_2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1 \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 \;\ldots\ldots\; 3x_2^2 + 8x_2 + 9 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 64 - 4.3.9 < 0 \quad \text{Impossible}$$

Ex6

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 + x_1x_2$$

$$g(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow g' = (x_1-1)^2 + x_2^2 - 1 + x_3^2 =$$

$$\phi = x_1 + x_2^2 + x_1x_2 + \lambda\left[(x_1-1)^2 + x_2^2 - 1 + x_3^2\right]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 1 + x_2 + 2\lambda(x_1 - 1) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1 + 2\lambda x_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = (x_1-1)^2 + x_2^2 - 1 + x_3^2 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 2\lambda x_3 = 0$$

contrainte inactive : $\lambda = 0$

$1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$

$x_1 = 2$. (1)

CS

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

on peut rien dire (1)

Ex 7

rectangle : longueur = 2 . largeur
$\ell = 2\,L$

$\underbrace{\qquad}_{x_1}\underbrace{\qquad}_{x_2}\underbrace{\qquad}_{x_3}$

carré : $x_1 = 4a \longrightarrow s_1 = a^2 = \dfrac{x_1^2}{16}$

rectangle : $x_2 = 2(\ell + \ell') = 2(3\ell) = 6\ell \Rightarrow \ell = x_2/6$

$S_2 = \ell' \cdot \ell = 2\ell^2 = 2\left(\dfrac{x_2}{6}\right)^2 = \dfrac{x_2^2}{18}$

cercle : $x_3 = 2\pi r \Rightarrow r = x_3/2\pi$

$S_3 = \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{x_3^2}{4\pi^2}\right) = \dfrac{x_3^2}{4\pi}$.

$$S = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{18} + \frac{x_3^2}{4\pi} = f$$ 0,5

$g = x_1 + x_2 + x_3 = L$ 0,5

$x_2 + x_3 = x_1 \Rightarrow x_1 = L/2$

$$\Phi = f + \lambda g = \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{18} + \frac{x_3^2}{4\pi} + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - L)$$

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \dfrac{1}{8}x_1 + \lambda = 0$ (1)

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \dfrac{x_2}{9} + \lambda = 0$ (2)

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \dfrac{1}{2\pi}x_3 + \lambda = 0$ (3)

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - L = 0$ (4)

(1) − (2) $\Rightarrow \dfrac{1}{8}x_1 - \dfrac{1}{9}x_2 = 0$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{9}{8}x_1 = \dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{L}{2} = \dfrac{9}{16}L$

$\Rightarrow$ (1) − (3) $\dfrac{1}{8}x_1 - \dfrac{1}{2\pi}x_3 = 0$

$x_3 = \dfrac{2\pi}{8}\cdot\dfrac{L}{2} = \dfrac{\pi}{8}L$.

0,5

C.S 0,5

$$\begin{vmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\pi \end{vmatrix}$$