

M

EPREUVE DE SYNTHÈSE
 Février 2008

EXERCICE 1

Un fabricant de graviers en produit deux catégories : le gravier brut et le gravier fin.
 La fabrication du gravier nécessite une opération de broyage de la pierre puis une opération de criblage. Deux qualités de pierre, nommées p_1 et p_2 , sont utilisées pour cette fabrication.

Pour le gravier brut, le broyage se fait au rythme de 500 kg de pierre à l'heure et le criblage au rythme de 125 kg de pierre déjà broyée à l'heure.

La fabrication d'une tonne de gravier fin nécessite 6 heures de broyage et 2 heures de criblage.

Dans la composition de gravier brut, on utilise autant de p_1 que de p_2 . Le gravier fin est, par contre, composé de 30% de p_1 et 70% de p_2 .

Le fabricant dispose, pour le broyage, de 36 heures sur le broyeur, et, pour le criblage, de 40 heures sur le cribleur. Son stock actuel de p_1 est de 3 tonnes et celui de p_2 est de 6 tonnes.

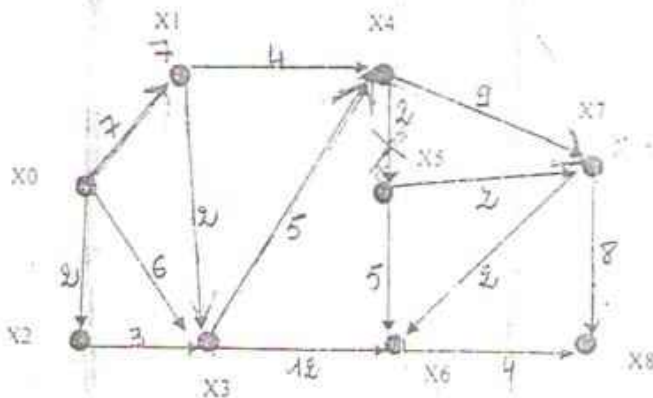
La vente d'une tonne de gravier brut lui rapporte un bénéfice de 100 UM et celle d'une tonne gravier fin un bénéfice de 125 UM.

- 1- Définir les variables principales avec le plus grand soin.
- 2- Donner la signification physique de chaque contrainte.
- 3- Etablir le programme linéaire du problème.
- 4- Etablir la forme standard du programme linéaire.
- 5- Donner le tableau des solutions. Interprétez chacune des solutions trouvées.

N.B : Les contraintes doivent être citées dans l'ordre de leur parution dans le texte.

EXERCICE 2

Soit le graphe orienté suivant :



14

Monday

JUILLET 1961

Adopt

15

JUILLET 1961

16

Corrigé de la synthèse : "Fevrier 2008"

Exercice N°1

→ (A) Les variables principales : x_1, x_2

- x_1 : quantité (en tonne) de gravier brut à fabriquer par les deux pierres P_1 et P_2 pour avoir un profit maximum.
- x_2 : quantité (en tonne) de gravier fin à fabriquer par les deux pierres P_1 et P_2 pour avoir un profit maximum.

→ (B) Les contraintes et leur signification.

- $2x_1 + 6x_2 \leq 36$: quantité de graviers brut et fin issues de broyeur.
- $8x_1 + 2x_2 \leq 40$: quantité de graviers brut et fin issues de criblage.
- $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$: quantité de graviers brut et fin fabriqués en utilisant la pierre P_1 .
- $0,5x_1 + 0,7x_2 \leq 6$: quantité de graviers brut et fin fabriqués en utilisant la pierre P_2 .

	P_1	P_2	disponibles	Calculs
Brut	2	6	36	$36/2 = 18$
Fin	8	2	40	$40/2 = 20$
P_1	0,5	0,3	3	$3/0,5 = 6$
P_2	0,5	0,7	6	$6/0,5 = 12$

• fonction économique

$$Z = 100x_1 + 125x_2 \quad [Dir]$$

Le profit est des quantités des graviers brut et fin fabriqués à partir des deux pierres P_1 et P_2 pour avoir un bénéfice maximal.

2008
Juillet

→ (C) Le programme linéaire :

Notes

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ 0,5x_1 + 0,7x_2 \leq 6 \\ Z = 100x_1 + 125x_2 \quad [Dir] \end{cases}$$

Notes

Samedi	5	12	19	26
Dimanche	6	13	20	27
Lundi	7	14	21	28
Mardi	1	8	15	22
Mercredi	2	9	16	23
Jeudi	3	10	17	24
Vendredi	4	11	18	25

→ (a) La forme standard : ajout des variables d'écart

$$\begin{aligned} & \text{Min } Z = 100x_1 + 125x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \quad [\text{Dirham}] \\ & \text{s.t.} \\ & 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 36 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \\ & 0.5x_1 + 0.3x_2 + x_5 = 3 \\ & 0.5x_1 + 0.7x_2 + x_6 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

→ (b) Tableau des solutions "Méthode du simplexe"

Tableau 0

Base	C _j	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	ch _i	ch _{base}
A ₃	0	2	6	1	0	0	0	36	60
A ₄	0	3	2	0	1	0	0	40	20
A ₅	0	0.5	0.3	0	0	1	0	3	150
A ₆	0	0.5	0.7	0	0	0	1	6	150
C _j	100	125	0	0	0	0	0		
A _j	100	125	0	0	0	0	0		

→ V₃ Solut optimale
= ch_{base}
x₁ = ch_i
V.H.B. : x₃ = x₄ = 0
V.B. : x₁ = 36, x₂ = 6
x₅ = 3 ; x₆ = 6
Z = Σ C_j · h_j = 0

Tableau 1

Base	C _j	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	ch _i	ch _{base}
A ₂	125	1/3	1	1/6	0	0	0	6	75
A ₄	0	7/6	0	-1/6	1	0	0	23	138
A ₅	0	1/6	0	-1/6	0	1	0	1/3	50
A ₆	0	1/3	0	-1/6	0	0	1	2/3	100
C _j	100	125	0	0	0	0	0		
A _j	100	125	0	0	0	0	0		

L₁' = L₁ / 6
L₂' = L₂ - L₁
L₃' = L₃ - 1/6 L₁
L₄' = L₄ - 1/3 L₁

La p. solution de la 1^{ère} itération :

V.H.B. = x₁ = x₃ = 0
V.B. = x₂ = 6, x₄ = 23
x₅ = 1/3 ; x₆ = 2/3

Z = 750

الثلاثاء
Mardi
Tuesday

22

الأربعاء
Mercredi
Wednesday

23

الخميس
Jeudi
Thursday

24

جولية JUILLET 204-162

جولية JUILLET 205-161

جولية JUILLET 206-160

Tableau 2

Source	C_j	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	d_i	$d_{i,j}$
A_2	125	0	20	1/200	0	-1/6	0	5	-6
A_4	0	0	0	1/300	-1	-5/6	0	6	-13/5
A_1	100	1	0	-1/200	0	1/6	0	3	4/5
A_6	0	0	0	1/300	0	-1/6	1	10	-13/5
	C_j	100	125	0	0	0	0		
	A_j	0	0	-1/200	0	1/6	0		

$L_1 = L_2 - 2L_3$
 $L_1 = L_2 - 2L_3$
 $L_1 = L_2 - 2L_3$
 $L_1 = L_2 - 2L_3$

12. tout les $A_j \leq 0$ alors les relatifs atteints dans : $V_1 B = x_3 = x_4 = 0$
 $V_2 B = x_1 = 3, x_2 = 0$
 $x_3 = 0, x_4 = \frac{100}{200}$
 $Z = 325$ (min)

Exercice N° 2

15. → Déterminer les sommets et les précédents

الجمعة
Vendredi
Friday

25

جولية JUILLET 207-159

x	$S(x)$	$10x$	$P(x)$
x_0	x_1, x_2, x_3	$10x_0$	-
x_1	x_2, x_4	$10x_1$	x_0
x_2	x_3	$10x_2$	x_0
x_3	x_0, x_2	$10x_3$	x_1, x_2, x_3
x_4	x_2, x_3	$10x_4$	x_1, x_3
x_5	x_0, x_3	$10x_5$	x_4
x_6	x_3	$10x_6$	x_2, x_4, x_5
x_7	x_0, x_5	$10x_7$	x_1, x_5, x_6
x_8	-	$10x_8$	x_0, x_7

2008
juillet

Samedi	5	12	19	26	
Dimanche	6	13	20	27	
Lundi	7	14	21	28	
Mardi	1	8	15	22	29
Mercredi	2	9	16	23	30
Jeudi	3	10	17	24	31
Vendredi	4	11	18	25	

16. → Recherche du graphique et le nombre des sommets dans l'arbre est 9.

→ Le chemin le plus long.

80 $(x_0, x_0) : (x_0, x_1), (x_0, x_2)$

$(x_0, x_1) : t_1 - t_0 = 0 < 7 \Rightarrow t_1' = 7$

$(x_0, x_2) : t_2 - t_0 = 0 < 2 \Rightarrow t_2' = 2$

$(x_0, x_3) : t_3 - t_0 = 0 < 6 \Rightarrow t_3' = 6$

10 $(x_1, x_2) : (x_1, x_3)$

11 $(x_1, x_3) : t_3' - t_1' = 6 - 7 = -1 < 2 \Rightarrow t_3'' = 11$

$(x_1, x_4) : t_4' - t_1' = 0 - 7 = -7 < 6 \Rightarrow t_4' = 11$

12 $(x_2, x_3) : t_3'' - t_2' = 11 - 2 > 3 \Rightarrow t_3'' = t_2'$

13 $(x_3, x_4) : (x_3, x_5)$

14 $(x_3, x_4) : t_4' - t_3' = 11 - 6 < 5 \Rightarrow t_4'' = 14$

$(x_3, x_6) : t_6' - t_3' = 0 - 6 < 12 \Rightarrow t_6' = 21$

15 $(x_4, x_5) : (x_4, x_6)$

16 $(x_4, x_5) : t_5' - t_4' = 0 - 11 < 14 \Rightarrow t_5' = 16$

$(x_4, x_6) : t_6' - t_4' = 0 - 11 < 23 \Rightarrow t_6'' = 23$

17 $(x_5, x_6) : (x_5, x_7)$

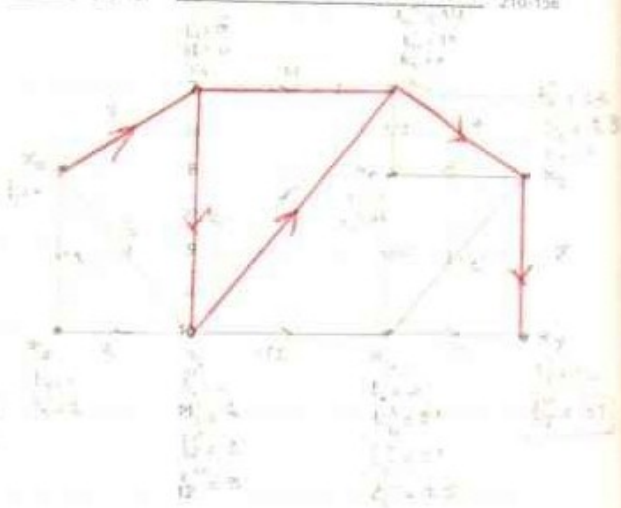
18 $(x_5, x_6) : t_6'' - t_5' = 23 - 16 = 7 > 5 \Rightarrow t_6'' = 21$

$(x_5, x_7) : t_7' - t_5' = 23 - 16 = 7 > 2 \Rightarrow t_7' = 23$

19 $(x_6, x_7) : t_7' - t_6' = 0 - 21 < 4 \Rightarrow t_7'' = 25$

20 $(x_7, x_8) : t_8' - t_7' = 24 - 23 = 1 < 5 \Rightarrow t_8' = 21$

21 Le chemin le plus long est alors: $7 + 2 + 5 + 3 + 3 = 30$



Notes

Blank space for notes.

Notes

Blank space for notes.

Notes

Blank space for notes.

الاثنين
Mardi
Tuesday

29

الأربعاء
Mercredi
Wednesday

30

الخميس
Jeudi
Thursday

31

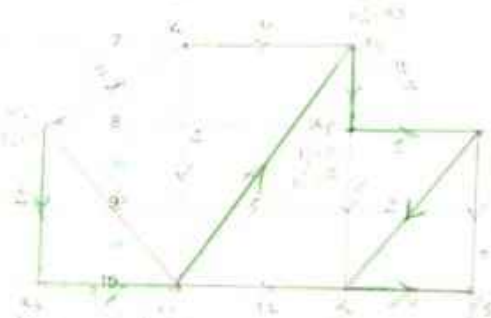
جويلية JUILLET 211-155

جويلية JUILLET 212-154

جويلية JUILLET 213-153

→ le chemin le plus court

- 8 • $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4)$
- 9 • $(x_0, x_1) = t_1 - t_0 = \infty \Rightarrow 7 \Rightarrow t_1^* = 7$
- 10 • $(x_1, x_2) = t_2 - t_1 = \infty \Rightarrow 2 \Rightarrow t_2^* = 2$
- 11 • $(x_2, x_3) = t_3 - t_2 = \infty \Rightarrow 6 \Rightarrow t_3^* = 6$
- 12 • $(x_0, x_2) ; (x_1, x_3)$
- 13 • $(x_0, x_2) = t_2^* - t_0^* = 6 - 7 = -1 < 2 \Rightarrow t_2^* = 6$
- 14 • $(x_1, x_3) = t_3^* - t_1^* = 6 - 7 = -1 < 4 \Rightarrow t_3^* = 11$
- 15 • $(x_0, x_3) = t_3^* - t_0^* = 6 - 7 = -1 < 4 \Rightarrow t_3^* = 5$
- 16 • $(x_2, x_4) ; (x_3, x_4)$
- 17 • $(x_2, x_4) = t_4^* - t_2^* = 11 - 6 = 5 > 5 \Rightarrow t_4^* = 10$
- 18 • $(x_3, x_4) = t_4^* - t_3^* = 10 - 6 = 4 > 2 \Rightarrow t_4^* = 14$
- 19 • $(x_0, x_3) ; (x_1, x_4)$
- 20 • $(x_0, x_3) = t_3^* - t_0^* = 6 - 7 = -1 < 2 \Rightarrow t_3^* = 12$
- 21 • $(x_1, x_4) = t_4^* - t_1^* = 10 - 7 = 3 > 4 \Rightarrow t_4^* = 14$
- 22 • $(x_2, x_4) ; (x_3, x_4)$
- 23 • $(x_2, x_4) = t_4^* - t_2^* = 14 - 6 = 8 > 5 \Rightarrow t_4^* = 17$
- 24 • $(x_3, x_4) = t_4^* - t_3^* = 17 - 6 = 11 > 2 \Rightarrow t_4^* = 14$
- 25 • $(x_0, x_4) = t_4^* - t_0^* = 14 - 7 = 7 > 4 \Rightarrow t_4^* = 21$
- 26 • $(x_1, x_4) = t_4^* - t_1^* = 14 - 7 = 7 > 3 \Rightarrow t_4^* = 16$
- 27 • $(x_2, x_4) = t_4^* - t_2^* = 16 - 6 = 10 > 3 \Rightarrow t_4^* = 27$



الجمعة
Vendredi
Friday

1

أوت AOÛT 214-152

2008

Août

Samedi	30	2	9	16	23
Dimanche	31	3	10	17	24
Lundi		4	11	18	25
Mardi		5	12	19	26
Mercredi		6	13	20	27
Jeudi		7	14	21	28
Vendredi	1	8	15	22	29

le chemin le plus court est : $6+3+5+8+10=27$

Notes

الجمعة
Samedi
Saturday

2

الأحد
Dimanche
Sunday

3

الاثنين
Lundi
Monday

4

أوت

AOÛT 215-151

أوت

AOÛT 216-150

أوت

AOÛT 217-145

→ Evolution des relations

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	
1	0	0	26	210	3	0	0	après la production
2	0	0	0	1023	1.2	1.3	150	produit du grain fin seulement
3	0	20	36	110				impossible car $x_3 < 0$
4	0	10	-24	12	0			"
5	0	10/4	-10/4	11		0		"
6	13	0	0	1044				soluion réalisable car $x_6 < 0$
7	5	0	20	150	0.5	3.5	300	produit du grain fin seulement
8	6	0	24	160	0			soluion non réalisable car $x_4 < 0$
9	12	0	12	056		0		"
10	12/11	2/11	0	180	-10/11			"
11	3	5	0	100	0	1	325	→ max (3,5,0,0,0,1)
12	13.5	3.75	0	207.5		0		soluion réalisable car $x_6 < 0$
13	4.000	2.333	0.22	210	0	1.757	735, 730	le max n'est pas atteint
14	3,471	6,017	7,471	1000	2,348	0		soluion non réalisable car $x_3 < 0$
15	1.5	7.5	-12		0	0		"