

M

EPREUVE DE SYNTHÈSE

Février 2008

EXERCICE 1

Un fabricant de graviers en produit deux catégories : le gravier brut et le gravier fin.  
 La fabrication du gravier nécessite une opération de broyage de la pierre puis une opération de criblage. Deux qualités de pierre, nommées  $p_1$  et  $p_2$ , sont utilisées pour cette fabrication.

Pour le gravier brut, le broyage se fait au rythme de 500 kg de pierre à l'heure et le criblage au rythme de 125 kg de pierre déjà broyée à l'heure.

La fabrication d'une tonne de gravier fin nécessite 6 heures de broyage et 2 heures de criblage.

Dans la composition de gravier brut, on utilise autant de  $p_1$  que de  $p_2$ . Le gravier fin est, par contre, composé de 30% de  $p_1$  et 70% de  $p_2$ .

Le fabricant dispose, pour le broyage, de 36 heures sur le broyeur, et, pour le criblage, de 40 heures sur le cribleur. Son stock actuel de  $p_1$  est de 3 tonnes et celui de  $p_2$  est de 6 tonnes.

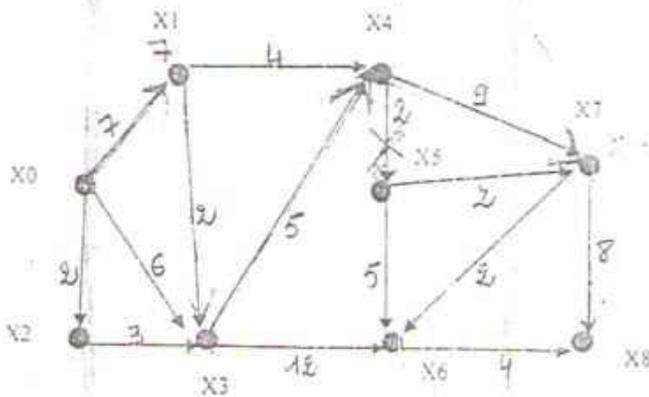
La vente d'une tonne de gravier brut lui rapporte un bénéfice de 100 UM et celle d'une tonne gravier fin un bénéfice de 125 UM.

- 1- Définir les variables principales avec le plus grand soin.
- 2- Donner la signification physique de chaque contrainte.
- 3- Etablir le programme linéaire du problème.
- 4- Etablir la forme standard du programme linéaire.
- 5- Donner le tableau des solutions. Interprétez chacune des solutions trouvées.

N.B : Les contraintes doivent être citées dans l'ordre de leur apparition dans le texte.

EXERCICE 2

Soit le graphe orienté suivant :



14

Monday

15

16

17

JUILLET 1961

Adopt

JUILLET 1961

- Donner le dictionnaire des antécédents et des précédents.
- Donner l'ordre du graphe
- Rechercher le chemin le plus court de  $X0$  jusqu'à  $X3$ .

N.B : Tous les résultats (tous les  $t_i$ ) doivent figurer sur le graphe orienté.

## Corrigé de la synthèse : "Fevrier 2008"

### Exercice N°1

- (1) Les variables principales :  $x_1, x_2$
- $x_1$  : quantité (en tonne) de gravier brut à fabriquer par les deux pierres  $P_1$  et  $P_2$  pour avoir un profit maximum.
  - $x_2$  : quantité (en tonne) de gravier fin à fabriquer par les deux pierres  $P_1$  et  $P_2$  pour avoir un profit maximum.
- (2) Les contraintes et leur signification.
- $2x_1 + 6x_2 \leq 36$  : quantité de graviers brut et fin issues de broyeur.
  - $8x_1 + 2x_2 \leq 40$  : quantité de graviers brut et fin issues de cribles.
  - $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$  : quantité de graviers brut et fin fabriqués en utilisant la pierre  $P_1$ .
  - $0,5x_1 + 0,7x_2 \leq 6$  : quantité de graviers brut et fin fabriqués en utilisant la pierre  $P_2$ .

	$P_1$	$P_2$	disponibles	calculées
Brut	2	6	36	100 HT
Fin	8	2	40	125 HT
$P_1$	0,5	0,3	3	
$P_2$	0,5	0,7	6	

الجمعة  
Vendredi  
Friday

# 18

جويلية  
JUILLET 200-166

• fonction économique

$Z = 100x_1 + 125x_2$  [Dir]

Le profit est des quantités des graviers brut et fin fabriqués à partir des deux pierres  $P_1$  et  $P_2$  pour avoir un bénéfice maximal.

### → (3) Le programme linéaire :

Notes

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ 0,5x_1 + 0,7x_2 \leq 6 \\ Z = 100x_1 + 125x_2 \text{ [Dir]} \end{cases}$$

Notes

2008

Juillet

Samedi	5	12	19	26
Dimanche	6	13	20	27
Lundi	7	14	21	28
Mardi	1	8	15	22
Mercredi	2	9	16	23
Jeudi	3	10	17	24
Vendredi	4	11	18	25

→ (a) La forme standard : ajout des variables d'écart

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } Z = 100x_1 + 125x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \quad [\text{Dirham}] \\
 & \text{s.t.} \\
 & 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 36 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \\
 & 0.5x_1 + 0.3x_2 + x_5 = 3 \\
 & 0.5x_1 + 0.7x_2 + x_6 = 6 \\
 & x_1, x_2 \geq 0; \quad x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

→ (b) Tableau des solutions "Méthode du simplexe"

Tableau 0

Base	C <sub>j</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	ch <sub>i</sub>	ch <sub>base</sub>
A <sub>3</sub>	0	2	6	1	0	0	0	36	60
A <sub>4</sub>	0	3	2	0	1	0	0	40	20
A <sub>5</sub>	0	0.5	0.3	0	0	1	0	3	150
A <sub>6</sub>	0	0.5	0.7	0	0	0	1	6	75
C <sub>j</sub>	100	125	0	0	0	0	0		
A <sub>j</sub>	100	125	0	0	0	0	0		

$\theta_3$  Solut optimale  
 - de base.  
 $x_1 = ch_i$   
 V.H.B. :  $x_1 - x_2 = 0$   
 V.B. :  $x_1 = 36, x_2 = 60$   
 $x_3 = 3; x_6 = 6$   
 $Z = \sum C_i \cdot b_i = 0$

Tableau 1

Base	C <sub>j</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	ch <sub>i</sub>	ch <sub>base</sub>
A <sub>2</sub>	125	1/3	1	1/6	0	0	0	6	75
A <sub>4</sub>	0	7/6	0	-1/6	1	0	0	23	138
A <sub>5</sub>	0	1/6	0	-1/6	0	1	0	1/3	5
A <sub>6</sub>	0	1/3	0	-1/6	0	0	1	2/3	15
C <sub>j</sub>	100	125	0	0	0	0	0		
A <sub>j</sub>	100	125	0	0	0	0	0		

$L_1 = L_1 / 6$   
 $L_2 = L_2 - L_1$   
 $L_3 = L_3 - \frac{1}{6}L_1$   
 $L_4 = L_4 - \frac{1}{6}L_1$

La p. solution de la 1<sup>ère</sup> itération :

V.H.B. =  $x_1 = x_3 = 0$   
 V.R. =  $x_2 = 6, x_4 = 23$   
 $x_5 = \frac{1}{3}; x_6 = \frac{2}{3}$   
 $Z = 750$

الثلاثاء  
Mardi  
Tuesday

22

الأربعاء  
Mercredi  
Wednesday

23

الخميس  
Jeudi  
Thursday

24

جولية JUILLET 204-162

جولية JUILLET 205-161

جولية JUILLET 206-160

Tableau 2

Source	$C_j$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$d_i$	$d_i'$
$A_2$	125	0	20	1/200	0	-1/6	0	5	-6
$A_4$	0	0	0	1/200	-1	-5/6	0	6	-13/5
$A_1$	100	1	0	-1/200	0	1/6	0	3	4/5
$A_6$	0	0	0	1/200	0	-1/6	1	10	-13/5
	$C_j$	100	125	0	0	0	0		
	$A_j$	0	0	-1/200	0	1/6	0		

$L_1 = L_2 - 2L_3$   
 $L_1 = L_2 - 2L_3$   
 $L_1 = L_2 - 2L_3$   
 $L_1 = L_2 - 2L_3$

12. tout les  $A_j \leq 0$  alors les relatifs atteints dans :  $V_1 B = x_3 = x_4 = 0$   
 $V_2 B = x_1 = 3, x_2 = 0$   
 $x_3 = 0, x_4 = \frac{100}{200}$   
 $Z = 325$  (min)

Exercice N° 2

15. → Déterminer les sommets et les précédents

x	S(x)	10x	P(x)
$x_0$	$x_1, x_2, x_3$	10 $x_0$	-
$x_1$	$x_3, x_4$	10 $x_1$	$x_0$
$x_2$	$x_3$	10 $x_2$	$x_0$
$x_3$	$x_4, x_5$	10 $x_3$	$x_1, x_2, x_3$
$x_4$	$x_5, x_7$	10 $x_4$	$x_1, x_3$
$x_5$	$x_6, x_7$	10 $x_5$	$x_4$
$x_6$	$x_7$	10 $x_6$	$x_3, x_4, x_5$
$x_7$	$x_6, x_5$	10 $x_7$	$x_2, x_3, x_4$
$x_8$	-	10 $x_8$	$x_6, x_7$

16. → Recherche du graphique et le nombre des sommets dans l'espace est 9.

الجمعة  
Vendredi  
Friday

25

جولية JUILLET 207-159

2008  
juillet

Samedi	5	12	19	26	
Dimanche	6	13	20	27	
Lundi	7	14	21	28	
Mardi	1	8	15	22	29
Mercredi	2	9	16	23	30
Jeudi	3	10	17	24	31
Vendredi	4	11	18	25	

→ Le chemin le plus long.

80  $(x_0, x_0) : (x_0, x_1), (x_0, x_2)$

$(x_0, x_1) : t_1 - t_0 = 0 < 7 \Rightarrow t_1 = 7$

8  $(x_0, x_2) : t_2 - t_0 = 0 < 2 \Rightarrow t_2 = 2$

$(x_0, x_3) : t_3 - t_0 = 0 < 6 \Rightarrow t_3 = 6$

10

10  $(x_1, x_3) : (x_1, x_4)$

11  $(x_1, x_3) : t_3' - t_1 = 6 - 7 = -1 < 2 \Rightarrow t_3' = 9$

$(x_1, x_4) : t_4 - t_1 = 0 - 7 = -7 < 6 \Rightarrow t_4 = 11$

12

10  $(x_2, x_3) : t_3'' - t_2 = 3 - 2 = 1 > 3 \Rightarrow t_3'' = t_2$

13

12  $(x_3, x_4) : (x_3, x_5)$

14  $(x_3, x_4) : t_4' - t_3 = 11 - 9 = 2 < 5 \Rightarrow t_4' = 14$

$(x_3, x_5) : t_5 - t_3 = 0 - 9 = -9 < 12 \Rightarrow t_5 = 21$

15

10  $(x_4, x_5) : (x_4, x_6)$

16  $(x_4, x_5) : t_5' - t_4 = 0 - 14 < 12 \Rightarrow t_5' = 16$

$(x_4, x_6) : t_6 - t_4 = 0 - 14 < 2 \Rightarrow t_6 = 23$

17

12  $(x_5, x_6) : (x_5, x_7)$

18  $(x_5, x_6) : t_6' - t_5 = 21 - 14 = 7 > 5 \Rightarrow t_6' = 21$

$(x_5, x_7) : t_7 - t_5 = 23 - 16 = 7 > 2 \Rightarrow t_7 = 23$

19

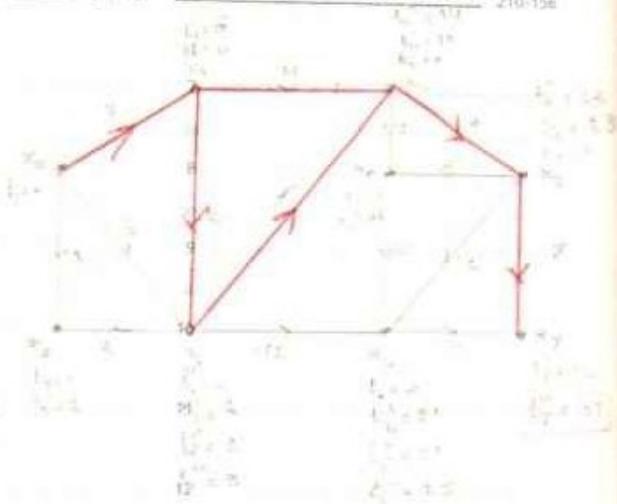
10  $(x_6, x_7) : t_7' - t_6 = 0 - 23 < 4 \Rightarrow t_7' = 25$

20

12  $(x_7, x_8) : t_8 - t_7 = 24 - 23 = 1 < 5 \Rightarrow t_8 = 24$

21

Le chemin le plus long est celui :  $7 + 2 + 5 + 3 + 3 = 30$



Notes

Blank notes area for page 26.

Notes

Blank notes area for page 27.

Notes

Blank notes area for page 28.

الثلاثاء  
Mardi  
Tuesday

29

الأربعاء  
Mercredi  
Wednesday

30

الخميس  
Jeudi  
Thursday

31

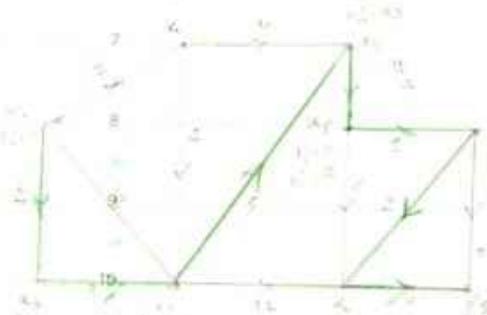
جويلية JUILLET 211-155

جويلية JUILLET 212-154

جويلية JUILLET 213-153

→ le chemin le plus court

- 8.  $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4)$
- 9.  $(x_0, x_1) = t_1 - t_0 = \infty \Rightarrow 7 \Rightarrow t_1^* = 7$
- 10.  $(x_1, x_2) = t_2 - t_1 = \infty \Rightarrow 2 \Rightarrow t_2^* = 2$
- 11.  $(x_2, x_3) = t_3 - t_2 = \infty \Rightarrow 6 \Rightarrow t_3^* = 6$
- 12.  $(x_0, x_2) ; (x_1, x_3)$
- 13.  $(x_0, x_2) = t_2^* - t_0^* = 6 - 7 = -1 < 2 \Rightarrow t_2^* = 6$
- 14.  $(x_1, x_3) = t_3^* - t_1^* = 6 - 7 = -1 < 4 \Rightarrow t_3^* = 11$
- 15.  $(x_0, x_3) = t_3^* - t_0^* = 6 - 7 = -1 < 4 \Rightarrow t_3^* = 5$
- 16.  $(x_2, x_4) ; (x_3, x_4)$
- 17.  $(x_2, x_4) = t_4^* - t_2^* = 11 - 6 = 5 > 5 \Rightarrow t_4^* = 10$
- 18.  $(x_3, x_4) = t_4^* - t_3^* = 10 - 6 = 4 > 2 \Rightarrow t_4^* = 14$
- 19.  $(x_0, x_4) ; (x_1, x_4)$
- 20.  $(x_0, x_4) = t_4^* - t_0^* = 10 - 7 = 3 > 2 \Rightarrow t_4^* = 12$
- 21.  $(x_1, x_4) = t_4^* - t_1^* = 10 - 7 = 3 > 9 \Rightarrow t_4^* = 19$
- 22.  $(x_2, x_5) ; (x_3, x_5)$
- 23.  $(x_2, x_5) = t_5^* - t_2^* = 17 - 6 = 11 > 5 \Rightarrow t_5^* = 17$
- 24.  $(x_3, x_5) = t_5^* - t_3^* = 17 - 6 = 11 > 3 \Rightarrow t_5^* = 14$
- 25.  $(x_0, x_5) = t_5^* - t_0^* = 17 - 7 = 10 > 4 \Rightarrow t_5^* = 21$
- 26.  $(x_1, x_6) = t_6^* - t_1^* = 17 - 7 = 10 > 3 \Rightarrow t_6^* = 16$
- 27.  $(x_2, x_6) = t_6^* - t_2^* = 16 - 6 = 10 > 3 \Rightarrow t_6^* = 27$



الجمعة  
Vendredi  
Friday

1

أوت AOÛT 214-152

2008  
Août

Samedi	30	2	9	16	23
Dimanche	31	3	10	17	24
Lundi		4	11	18	25
Mardi		5	12	19	26
Mercredi		6	13	20	27
Jeudi		7	14	21	28
Vendredi	1	8	15	22	29

le chemin le plus court est :  $6+3+5+8+2+2+3=27$

Notes

Notes

الجمعة  
Samedi  
Saturday

2

الأحد  
Dimanche  
Sunday

3

الاثنين  
Lundi  
Monday

4

أوت

AOÛT 215-151

أوت

AOÛT 216-150

أوت

AOÛT 217-145

→ Evolution des relations

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$Z$	
1	0	0	26	210	3	0	0	après la production
2	0	0	0	1023	1.2	1.3	150	produit du grain fin seulement
3	0	20	36	110				impossible car $x_3 < 0$
4	0	10	-24	12	0			"
5	0	10/4	-10/4	11		0		"
6	13	0	0	1044				soluion réalisable car $x_6 < 0$
7	5	0	20	150	0.5	3.5	300	produit du grain fin seulement
8	6	0	24	160	0			soluion non réalisable car $x_4 < 0$
9	12	0	12	056		0		"
10	12/11	2/11	0	180	-10/11			"
11	3	5	0	100	0	1	325	→ max (3,5,0,0,0,1)
12	13,5	3,75	0	207,5		0		soluion réalisable car $x_6 < 0$
13	4,000	2,333	0,25	210	0	1,757	735, 730	le max n'est pas atteint
14	3,471	6,017	7,471	1000	2,348	0		soluion non réalisable car $x_3 < 0$
15	1,5	7,5	-12		0	0		"